Studentische Lösungen zum Übungsblatt 9

Hier finden sich gute bis sehr gute Lösungen zu den Aufgaben, die von Studierenden abgegeben wurden. Die Autorinnen und Autoren der Lösungen haben zugestimmt, dass sie an dieser Stelle zur Verfügung gestellt werden.

Aufgabe 44.

Behauptung: Wenn $\mathfrak{X}_0=(X_0,<_0)$ und $\mathfrak{X}_1=(X_1,<_1)$ Wohlordnungen sind, so auch $\mathfrak{X}_0 \oplus \mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_0 \otimes \mathfrak{X}_1$

Beweis:

Definiere $(<_0 \cup <_1 \cup (X_0 \times X_1)) =: <$. Dass $\mathfrak{X}_0 \oplus \mathfrak{X}_1 = (X_0 \cup X_1, <)$ eine Ordnung i.S.v. $<$ ist, falls X_0, X_1 disjunkte Mengen sind, haben wir in Aufgabe (33) gezeigt.

Wir zeigen: Falls X_0, X_1 disjunkte Mengen sind, so ist $\mathfrak{X}_0 \oplus \mathfrak{X}_1 = (X_0 \cup X_1, <)$ eine fundierte Struktur.

Sei $A \subseteq (X_0 \cup X_1)$ nicht-leer.

1. Fall: $A \cap X_0 = \emptyset$

Dann ist $A \subseteq X_1$. Da $\mathfrak{X}_0$ eine Wohlordnung ist, besitzt A bzgl. $<_1$ ein kleinstes Element m.

Sei $a \in A \setminus \{m\}$. Dann ist also $(m,a) \in <_1$. Mit $<_1 \subseteq <$ folgt $(m,a) \in <$.

Das Element m ist also kleinstes Element von A bzgl. $<$.

2. Fall: $A \cap X_0 \neq \emptyset$.

Da $\mathfrak{X}_0$ wohlgeordnet ist folgt mit $A \cap X_0 \subseteq X_0$, dass $A \cap X_0$ ein bzgl. $<_0$ kleinstes Element m besitzt. Dieses ist auch kleinstes Element von A:

Sei dafür $a \in A \setminus \{m\}$.

- Falls $a \in X_0$, dann ist $(m,a) \in <_0$ aufgrund der Minimalität von m. Mit $<_0 \subseteq <$ folgt $(m,a) \in <$.
- Falls $a \in X_1$, dann ist $(m,a) \in (X_0 \times X_1)$. Mit $(X_1 \times X_2) \subseteq <$ folgt $(m,a) \in <$.

q.e.d.

Definiere nun $t := \{((a,b),(a',b')) \in (X_0 \times X_1)^2 ; (a <_0 a' \vee (a=a' \wedge b <_1 b'))\}$

Dass $\mathfrak{X}_0 \oplus \mathfrak{X}_1 = (X_0 \times X_1, t)$ eine Ordnung i.S.v. $<$ ist, haben wir in Aufgabe (33) gezeigt.

Wir zeigen: $\mathfrak{X}_0 \otimes \mathfrak{X}_1 = (X_0 \times X_1, t)$ ist eine fundierte Struktur.

Sei $A \subseteq (X_0 \times X_1)$ nicht-leer.

Betrachte $B = \{a \in X_0 ; \exists b ((a,b) \in A)\}$.

Da $A \neq \emptyset$ ist, gilt $B \neq \emptyset$. Andernfalls würde mit $B=\emptyset$ gelten; $\emptyset \times X_1 \supseteq A$. Also wäre $A=\emptyset$. Wid.

Weiterhin ist $B \subseteq X_0$. Da $\mathfrak{X}_0$ wohlgeordnet ist hat B also ein bzgl. $<_0$ kleinstes Element m.

Betrachte $C = \{b \in X_1 ; (m,b) \in A\}$.

Da $m \in B$ ist, gilt $\exists b ((m,b) \in A)$. Somit ist $C \neq \emptyset$.

Weiterhin ist $C \subseteq X_1$. Da $\mathfrak{X}_1$ wohlgeordnet ist, hat C also ein bzgl. $<_1$ kleinstes Element n.

<u>Zz</u>: Für alle $(a', b') \in A \setminus \{(m,n)\}$ ist $((m,n),(a',b')) \in t$.

Sei $(a', b') \in A \setminus \{(m,n)\}$.

Angenommen $((m,n),(a',b')) \notin t$.

Dann wäre mit zweimaliger Anwendung von De Morgan:

$(m \not<_0 a' \wedge (m \neq a' \vee n \not<_1 b'))$.

Die Menge $\mathfrak{X}_0$ ist linear geordnet; die Ordnung $<_0$ ist also konnex.

Falls $m \neq a'$, ist mit $m \not<_0 a'$ daher $a' <_0 m$. <u>Wid.</u> zu: m ist kleinstes Element in B.

Es gilt daher $m = a'$ und $n \not<_1 b'$.

Die Menge $\mathfrak{X}_1$ ist linear geordnet, die Ordnung $<_1$ ist also konnex.

Somit folgt: $b' = n$ oder $b' <_1 n$.

Falls $b' = n$, ist $(m,n) = (a',b')$. <u>Wid.</u> zu: $(a',b') \in A \setminus \{(m,n)\}$.

Der Fall $b' <_1 n$ ist ein <u>Wid.</u> zur Minimalität von $n \in C$.

Dies beendet den Beweis.

$\square$

Aufgabe 45.

Behauptung. Sei X eine Menge und $\in_X$ die binäre Elementrelation auf X. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) X ist transitiv. (ii) $\bigcup X \subset X$.

(iii) Für alle $x \in X$ ist $x \subset X$. (iv) Für alle $x \in X$ ist $\in_X [x] = x$.

Beweis.

(1) Angenommen (i). Dann gilt für jedes $x \in X$ und jedes $y \in x$, dass $y \in X$, also $\bigcup X \subset X$ (ii).

(2) Angenommen (ii). Dann gilt für jedes $x \in X$ und $y \in x$, dass $x \in X$, also $x \subset X$ (iii).

(3) Angenommen (iii). Dann ist $\in_X [x] = \{y \in x \mid y \in_X x\} = \{y \in x \mid y \in x\} = x$ (iv).

(4) Angenommen (iv). Dann gilt für jedes $x \in X$ und $y \in x$, dass $y \in \in_X [x]$, also $y \in X$ (i).

$\square$

Aufgabe 46.

(46) zz: U-Ax folgt aus ZF° ohne U-Ax:

~~Sei x, y, z~~ zeige zuerst Paarmengenaxiom (Paar):

Seien x, y Mengen (bel.), sei z bel. weitere Menge.

~~Sei~~ ordne nun z eine eindeutige Menge z' zu.

Sei dazu $\varphi(z, z', x, y) = (z = \emptyset \land z' = y)$

$\lor (z = \{\emptyset\} \land z' = x)$

$\lor (z \neq \emptyset \land z \neq \{\emptyset\} \land z' = \emptyset)$

Mit φ hat man also eine funktionale Mengenzuweisung.

Nun ist $\operatorname{Pot}(\operatorname{Pot}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Also ex. die Paarmenge $\{x, y\}$ nach dem Ers.-axiom und dem Aussonderungsaxiom.

also ex. auch $x \cup y = \bigcup \{x, y\}$. $\square$

Aufgabe 47.

Aufgabe 47: Behauptung: Es gilt:

(a): Jede Limeszahl ist Supremum einer Menge von Nachfolgerzahlen.

(b): Es gibt eine Limeszahl δ, die das Supremum einer Menge von Limeszahlen $< \delta$ ist.

(c): Die Limeszahlen bilden keine Menge.

Beweis:

(a): Sei δ Limeszahl. Definiere $X_\delta := \{x \in \delta \mid x \text{ ist Nachfolgerzahl }\}$.
Dass δ obere Schranke von X_δ ist, folgt direkt.
Angenommen, x' sei eine kleinere obere Schranke. Also gilt $x' < \delta$; und damit auch $x' < \mathbb{S}(x') < \delta$, also $\mathbb{S}(x') \in X_\delta$ im Widerspruch zu x' obere Schranke.

(b): Betrachte $\delta := \omega \cdot \omega$. Wir zeigen: δ ist das Supremum von $\{\omega \cdot \xi \mid \xi < \omega\} := X$.
(Diese sind allesamt Limeszahlen und kleiner als δ, erfüllen also die Forderungen).

Bemerke zunächst: $\delta = \bigcup X$ (nach Definition von $\omega \cdot \omega$) und $X \subseteq \delta$.

δ ist Limeszahl, denn:
Angenommen, es gilt $\delta = \mathbb{S}(z)$ für eine Ordinalzahl z.
Dann ist $z \in \delta$, also $z \in \bigcup X \Rightarrow \exists x\ (x \in X \land z \in x)$.
Mit $X \subseteq \delta$ folgt $z \in x \in \delta$ im Widerspruch zu $\delta = \mathbb{S}(z)$.

Dass δ obere Schranke von X ist, gilt wegen $X \subseteq \delta$.

δ ist die kleinste solche Schranke, denn:
Nehme an, z sei eine kleinere Schranke.
wie zuvor folgt $z \in \delta$, also $z \in \bigcup X \Rightarrow \exists x\ (x \in X \land z \in x)$.
Nun ist $x \in X \land z \in x$ aber im Widerspruch zu z obere Schranke von X.

(c): Angenommen, es gäbe die Menge $\Omega := \{\delta \mid \delta \text{ Limeszahl}\}$.
Dies ist nun eine Menge von Ordinalzahlen, also ist auch $\Omega' := \bigcup \Omega$ eine solche.
Jetzt ist aber Ω' die Menge aller Ordinalzahlen. Da diese nicht existiert, liegt ein Widerspruch vor.

$\square$

Aufgabe 48.

Behauptung:

(a) Für jede Ordinalzahl μ gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion H_μ mit $Def(H_\mu) = \mu$, welche $\#(X,F)$ auf ihrem Definitionsbereich erfüllt.

(b) Falls $\nu < \mu$, so ist $H_\nu = H_\mu \restriction \nu$

Beweis:

(a) Sei μ eine beliebige Ordinalzahl.

Eindeutigkeit: Seien H_1 und H_2 zwei Funktionen mit $Def(H_1) = Def(H_2) = \mu$, welche $\#(X,F)$ erfüllen.

Sei $A = \{a \in \mu;\ H_1(a) = H_2(a)\} \subseteq \mu$.

- Da H_1 und H_2 $\#(X,F)$ erfüllen, gilt $H_1(0) = X = H_2(0)$. Also $0 \in A$.
- Angenommen $a \in A$. Dann $H_1(a+1) \underset{\substack{H_1 \text{ erfüllt} \\ \#(X,F)}}{=} F(H_1(a)) \underset{a \in A}{=} F(H_2(a)) \underset{H_2 \text{ erfüllt } \#(X,F)}{=} H_2(a+1)$.
- Angenommen für eine Limeszahl $\delta < \mu$ ist $<[\delta] \subseteq A$. (*)

Mit Aufgabe 45 gilt für jede transitive Menge x, insbesondere also für Ordinalzahlen, dass $x = <[x]$. (**)

Dann ist $H_1(\delta) = F(H_1 \restriction \delta) \overset{(**)}{=} F(H_1 \restriction <[\delta]) \overset{(*)}{=} F(H_2 \restriction <[\delta]) \overset{(**)}{=} F(H_2 \restriction \delta) = H_2(\delta)$.
Mit dem Prinzip der transfiniten Induktion folgt: $A = \mu$.

Existenz:

Definiere g ist ein Anfang $:\longleftrightarrow$ g ist Funktion $\wedge$ $Def(g)$ ist Anfangsstück von $(\mu, \in)$
$\wedge$ g erfüllt $\#(X,F)$ auf $Def(g)$.

Sei $b = \{\upsilon \in \mu;\ \exists g(g \text{ ist ein Anfang} \wedge \upsilon \in Def(g))\} \subseteq \mu$.

- Es existiert die Funktion $g: \{0\} \longrightarrow \{X\};\quad 0 \longmapsto X$
Diese ist offenbar ein Anfang. Also $0 \in b$.

Es gelte $a \in b$.

Also existiert eine Funktion g mit $g(0) = X$, $g(\beta+1) = F(g(\beta))$, $g(\delta) = F(g \upharpoonright \delta)$

für δ Limeszahl, und β Ordinalzahl und $\beta, \delta \in a$.

Setze $g_1 : \{a+1\} \longrightarrow \{F(g(a))\}$; $a+1 \mapsto F(g(a))$.

Es existiert $g_2 := (g \cap (a \times \mathrm{Bild}(g))) \cup g_1$.

Offenbar ist g_2 ein Anfang und $a+1 \in \mathrm{Def}(g_2)$. Also $a+1 \in b$.

Analog beweist man die anderen Schritte der transfiniten Induktion, und erhält $\mu = b$.

Da μ beliebig gewählt war, folgt Behauptung (a).

$\square$

(b):

Für zwei Ordinalzahlen ν und μ gelte $\nu \in \mu$.

Angenommen $H_\nu \neq H_\mu \upharpoonright \nu$. $(*)$

Sei $A = \{a \in \nu ;\ H_\nu(a) \neq H_\mu \upharpoonright \nu(a)\} \subseteq \nu$. Diese ist nicht-leer, besitzt daher ein bzgl. $\in$ minimales Element m.

1. Fall: m ist 0.

Dann: $H_\nu(0) = X = H_\mu \upharpoonright_\nu(0)$ Wid. zu $m \in A$.

2. Fall: $m = n+1$ ist Nachfolgerzahl.

Dann ist $H_\nu(n+1) = F(H_\nu(n)) \underset{\text{Minimalität von } m}{=} F(H_\mu \upharpoonright \nu(n)) = H_\mu \upharpoonright \nu(n+1)$.

Wid. zu $m \in A$.

3. Fall: m ist Limeszahl.

Dann ist $H_\nu(m) = F(H_\nu \upharpoonright m) \underset{\text{Minimalität von } m}{=} F((H_\mu \upharpoonright \nu) \upharpoonright m) = H_\mu \upharpoonright \nu(m)$.

Wid. zu $m \in A$.

Mit Negation von $(*)$ erhalten wir die Behauptung (b)

$\square$

Aufgabe 49.
Wir zeigen als erstes eine Hilfsbehauptung.

Behauptung. Seien α, β und γ Ordinalzahlen. Dann gilt:

(i) falls $\alpha < \beta$, so ist $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$.

(ii) falls $\alpha < \beta$ und $\gamma > 0$, so ist $\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$.

(iii) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

Beweis. Wir zeigen als erstes (i) per Induktion nach β.

$\beta = 0$: Dann gibt es kein $\alpha < \beta$.

$\beta = S(\xi)$: Dann ist $\alpha \leq \xi$. Falls $\alpha = \xi$ ist, so gilt $\gamma+\beta = \gamma+S(\xi) = \gamma+S(\alpha) = S(\gamma+\alpha) > \gamma+\alpha$. Also können wir annehmen, dass $\alpha < \xi$ ist. Dann gilt

$$\gamma + \beta = \gamma + S(\xi) = S(\gamma + \xi) > \gamma + \xi \overset{\text{IV}}{>} \gamma + \alpha.$$

β Limeszahl: Sei $\alpha < \xi < \beta$. Dann gilt $S(\xi) < \beta$ und $\gamma + \xi < S(\gamma + \xi) = \gamma + S(\xi)$. Somit gilt

$$\gamma + \beta = \bigcup\{\gamma + \zeta : \zeta < \beta\} > \gamma + \xi \overset{\text{IV}}{>} \gamma + \alpha.$$

Als nächstes zeigen wir (ii) per Induktion nach β.

$\beta = 0$: Dann gibt es kein $\alpha < \beta$.

$\beta = S(\xi)$: Dann ist $\alpha \leq \xi$. Falls $\alpha = \xi$ ist, so gilt $\gamma \cdot \beta = \gamma \cdot S(\xi) = \gamma \cdot S(\alpha) = \gamma \cdot \alpha + \gamma \overset{\text{(i)}}{>} \gamma \cdot \alpha$. Also können wir annehmen, dass $\alpha < \xi$ ist. Dann gilt

$$\gamma \cdot \beta = \gamma \cdot S(\xi) = \gamma \cdot \xi + \gamma \overset{\text{(i)}}{>} \gamma \cdot \xi \overset{\text{IV}}{>} \gamma \cdot \alpha.$$

β Limeszahl: Sei $\alpha < \xi < \beta$. Dann gilt $S(\xi) < \beta$ und $\gamma \cdot \xi \overset{\text{(i)}}{<} \gamma \cdot \xi + \gamma = \gamma \cdot S(\xi)$. Somit gilt

$$\gamma \cdot \beta = \bigcup\{\gamma \cdot \zeta : \zeta < \beta\} > \gamma \cdot \xi \overset{\text{IV}}{>} \gamma \cdot \alpha.$$

An den drei Stellen an denen wir (i) verwenden geht auch $\gamma > 0$ ein. Es bleibt (iii) zu zeigen. Wir zeigen dies per Induktion nach γ.

$\gamma = 0$: Es gilt $\alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + (\beta + 0) = \alpha + \beta = (\alpha + \beta) + 0 = (\alpha + \beta) + \gamma$.

$\gamma = S(\xi)$: Es gilt

$$\begin{aligned}\alpha + (\beta + \gamma) &= \alpha + (\beta + S(\xi)) = \alpha + S(\beta + \xi) = S(\alpha + (\beta + \xi)) \\ &\overset{\text{IV}}{=} S((\alpha + \beta) + \xi) = (\alpha + \beta) + S(\xi) = (\alpha + \beta) + \gamma.\end{aligned}$$

γ Limeszahl: Es gilt $\beta+\gamma = \bigcup\{\beta+\xi : \xi < \gamma\}$. Nach (i) hat $\{\beta+\xi : \xi < \gamma\}$ kein größtes Element. Somit ist $\beta + \gamma$ eine Limeszahl und so gilt $\alpha + (\beta + \gamma) = \bigcup\{\alpha + \zeta : \zeta < \beta + \gamma\}$. Für jedes $\zeta < \beta + \alpha$ gibt es ein $\xi < \gamma$ mit $\zeta < \beta + \xi$. Also gilt

$$\begin{aligned}\bigcup\{\alpha + \zeta : \zeta < \beta + \gamma\} &\overset{\text{(i)}}{=} \bigcup\{\alpha + (\beta + \xi) : \xi < \gamma\} \overset{\text{IV}}{=} \bigcup\{(\alpha + \beta) + \xi : \xi < \gamma\} \\ &= (\alpha + \beta) + \gamma.\end{aligned}$$

□

Nun zeigen wir die Aufgabe.

(a) Es gilt $5 + \omega = \bigcup\{5 + n : n < \omega\} = \bigcup\{n \in \omega : n \geq 5\} = \omega$. Weiter gilt nach (i), dass $\omega + 5 > \omega + 0 = \omega$.

(b) Es gilt $7 \cdot \omega = \bigcup\{7 \cdot n : n < \omega\} = \bigcup 7\mathbb{N} = \omega$. Weiter gilt nach (ii), dass $\omega \cdot 7 > \omega \cdot 1 = \omega$.

(c) Wir zeigen als erstes per Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n > 0$, $(\omega+1)\cdot n = \omega\cdot n+1$ gilt.

$n = 1$: Es gilt $(\omega + 1) \cdot 1 = \omega \cdot 1 + 1$.

$S(n)$: Es gilt

$$\begin{aligned}(\omega+1)S(n) &= (\omega+1)n+(\omega+1) \overset{\text{IV}}{=} (\omega\cdot n+1)+(\omega+1)\\ &= (\omega\cdot n+1)+S(\omega) \overset{(iii)}{=} \omega\cdot n+(1+S(\omega))\\ &= \omega\cdot n+S(1+\omega) = \omega\cdot n+S(\omega)\\ &= S(\omega\cdot n+\omega) = S(\omega\cdot S(n)) = \omega\cdot(n+1)+1.\end{aligned}$$

Somit gilt $(\omega+1)\cdot\omega = \bigcup\{(\omega+1)\cdot n : n<\omega\} = \bigcup\{\omega\cdot n+1 : n<\omega\}$. Nach (ii) gilt, dass $\omega\cdot n+1 < \omega\cdot n+\omega = \omega\cdot(n+1)$. Also gilt $\bigcup\{\omega\cdot n+1 : n<\omega\} = \bigcup\{\omega\cdot n : n<\omega\} = \omega\cdot\omega$.

(d) Es gilt $\omega+(\omega\cdot\omega) = \bigcup\{\omega+\alpha : \alpha<\omega\cdot\omega\}$ und $\omega\cdot\omega = \bigcup\{\omega\cdot n : n<\omega\}$. Weiter gibt es für jedes $\alpha<\omega\cdot\omega$ ein $n<\omega$ mit $\alpha<\omega\cdot n$. Also gilt mit (i), dass

$$\begin{aligned}\bigcup\{\omega+\alpha : \alpha<\omega\cdot\omega\} &= \bigcup\{\omega+\omega\cdot n : n<\omega\} \overset{\text{(e)}}{=} \bigcup\{\omega\cdot(1+n) : n<\omega\}\\ &= \bigcup\{\omega\cdot n : n<\omega\} = \omega\cdot\omega.\end{aligned}$$

(e) Induktion nach γ.

$\gamma=0$: Es gilt $\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot(\beta+0) = \alpha\cdot\beta = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot 0 = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$.

$\gamma=S(\xi)$: Es gilt

$$\begin{aligned}\alpha\cdot(\beta+\gamma) &= \alpha\cdot(\beta+S(\xi)) = \alpha\cdot S(\beta+\xi) = \alpha\cdot(\beta+\xi)+\alpha\\ &\overset{\text{IV}}{=} (\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\xi)+\alpha \overset{\text{(iii)}}{=} \alpha\cdot\beta+(\alpha\cdot\xi+\alpha)\\ &= \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot S(\xi) = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma.\end{aligned}$$

γ Limeszahl: Es gilt $\beta+\gamma = \bigcup\{\beta+\xi : \xi<\gamma\}$. Nach (i) hat $\{\beta+\xi : \xi<\gamma\}$ kein größtes Element. Somit ist $\beta+\gamma$ eine Limeszahl und so gilt $\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \bigcup\{\alpha\cdot\zeta : \zeta<\beta+\gamma\}$. Für jedes $\zeta<\beta+\gamma$ gibt es ein $\xi<\gamma$ mit $\zeta<\beta+\xi$. Also gilt

$$\begin{aligned}\bigcup\{\alpha\cdot\zeta : \zeta<\beta+\gamma\} &\overset{\text{(ii)}}{=} \bigcup\{\alpha\cdot(\beta+\xi) : \xi<\gamma\} \overset{\text{IV}}{=} \bigcup\{\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\xi : \xi<\gamma\}\\ &\overset{\text{(i)}}{=} \bigcup\{\alpha\cdot\beta+\zeta : \zeta<\beta+\gamma\} = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma.\end{aligned}$$