Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2020
Prof. Dr. Benedikt Löwe, Lucas Wansner M.Sc.

Musterklausur

27. Juli 2020, 14:00-16:00

Name:

Matrikelnummer:

Die Klausur dauert 120 Minuten (von 14:00 s.t. bis 16:00).

Es gibt insgesamt 80 Punkte in der Klausur; 40 Punkte sind ausreichend, um die Klausur zu bestehen.

Wenn Sie im Beweis Theoreme aus der Vorlesung verwenden, zitieren Sie bitte die Aussage der Theoreme präzise ohne Beweis: z.B. „Im folgenden verwenden wir das Substitutionslemma: $\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t)}{x} \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathfrak{I} \models \varphi\frac{t}{x}$“.

Frage 1.	(20 Punkte)	**Frage 3.**	(20 Punkte)
Frage 2.	(20 Punkte)	**Frage 4.**	(20 Punkte)
TOTAL.	(80 Punkte)	***NOTE***	

Frage 1. *Syntax der Prädikatenlogik erster Stufe.*

Der in der Vorlesung definierte *Gentzen-Kalkül* besteht aus den folgenden zehn Regeln: (Vor), (Ant), (Wid), (FU), ($\vee$A), ($\vee$S), ($\equiv$), (Sub), ($\exists$A) und ($\exists$S).

Wählen Sie fünf Regeln R_1, R_2, R_3, R_4 und R_5 aus dieser Liste aus, so daß der Kalkül $\mathfrak{K} := \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$ die folgenden Eigenschaften hat:

(1) Falls $\Gamma\varphi$ und $\Gamma\varphi\psi$ $\mathfrak{K}$-ableitbar sind, so auch $\Gamma\psi$.

(2) Falls $\Gamma(\neg\varphi \vee \psi)$ und $\Gamma\varphi$ $\mathfrak{K}$-ableitbar sind, so auch $\Gamma\psi$.

Aufgabe.

(i) Formulieren Sie die fünf von Ihnen gewählten Regeln mathematisch präzise.

(ii) Beweisen Sie, daß der von Ihnen gewählte Kalkül die Eigenschaften (1) und (2) hat.

Frage 2. *Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe.*

(i) Sei S eine Symbolmenge und seien $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ und $\mathfrak{A}^* = (A^*, \mathfrak{a}^*)$ zwei S-Strukturen. Das *Isomorphielemma* sagt: falls $\pi : A \to A^*$ ein S-Isomorphismus ist, so gilt für jede S-Formel φ mit freien Variablen $x_1, ..., x_n$ und jede A-Belegung β:

$$\mathfrak{A}, \beta \models \varphi \iff \mathfrak{A}^*, \pi \circ \beta \models \varphi.$$

Nehmen Sie an, daß Sie die Behauptung des Isomorphielemmas bereits für die Formel φ gezeigt haben und beweisen Sie die Behauptung für die Formel $\exists x\varphi$.

(ii) Sei S eine Symbolmenge, $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ eine S-Struktur und $\pi : A \to A$ ein S-Automorphismus. Eine Teilmenge $X \subseteq A$ heißt *definierbar*, falls eine S-Formel φ mit einer freien Variablen x existiert, so daß für jede Belegung β gilt:

$$a \in X \iff \mathfrak{A}, \beta\frac{a}{x} \models \varphi.$$

Eine Teilmenge $X \subseteq A$ heißt *invariant unter* π, falls für jedes $a \in X$ gilt, daß $\pi(a) \in X$. Zeigen Sie, daß jede definierbare Teilmenge invariant unter π ist.

[Sie dürfen das Isomorphielemma aus Aufgabenteil (i) verwenden.]

Wir betrachten nun die Symbolmenge $S := \{+, \cdot, 0, 1\}$ der Sprache der Körper und die S-Strukturen $\mathfrak{Q} := (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$, $\mathfrak{R} := (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ und $\mathfrak{C} := (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ der rationalen, reellen und komplexen Zahlen.

(iii) Geben Sie S-Sätze σ_1, σ_2 und σ_3 an, so daß $\mathfrak{Q} \models \sigma_1 \wedge \sigma_2$, $\mathfrak{R} \models \neg\sigma_1 \wedge \sigma_3$ und $\mathfrak{C} \models \neg\sigma_2 \wedge \neg\sigma_3$.

[Sie müssen nicht beweisen, daß diese Sätze in den entsprechenden Strukturen gelten, wenn es sich um Sätze handelt, welche üblicherweise bekannten Eigenschaften dieser Strukturen entsprechen.]

(iv) Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{C}$ *liegt in der oberen Halbebene*, falls für alle $x + iy \in X$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) gilt, daß $y > 0$. Zeigen Sie, daß eine nichtleere S-definierbare Teilmenge von $\mathbb{C}$ nicht in der oberen Halbebene liegen kann.

Frage 3. *Axiome der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre.*

Das Axiomensystem ZF_0 besteht aus den Axiomen(schemata) Ext (Extensionalität), Aus_φ (Aussonderung), $\cup$-Ax (kleine Vereinigung), $\bigcup$-Ax (große Vereinigung), Pot (Potenzmenge), Inf (Unendlichkeit) und Ers_φ (Ersetzung).

Wählen Sie drei dieser Axiome aus, so daß Sie mit dieser Wahl Aufgabenteile (iii) und (iv) lösen können. Hierbei gelten Axiomenschemata als **ein** Axiom. Im folgenden bezeichnen wir die Menge der von Ihnen ausgewählten Formeln als Φ.

(i) Geben Sie für jedes der drei von Ihnen gewählten Axiome(nschemata) die präzise Formel in der Sprache der Mengenlehre an.

[Ihre Antwort sollte eine korrekte Formel in $L^{\{\in\}}$ sein, also keine Abkürzungen wie $\{\cdot,\cdot\}$ oder $\mathrm{Pot}(\cdot)$ verwenden. Sie dürfen alle logischen Symbole $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$, $\forall$, $\exists$ verwenden.]

(ii) Geben Sie die präzise Formel φ in der Sprache der Mengenlehre an, die die informelle Aussage „Es gibt keine universelle Menge“ / „Es gibt keine Menge aller Mengen“ beschreibt.

[Ihre Antwort sollte eine korrekte Formel in $L^{\{\in\}}$ sein. Sie dürfen alle logischen Symbole $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$, $\forall$, $\exists$ verwenden.]

(iii) Beweisen Sie für die von Ihnen angegebenen Φ und φ in (i) und (ii), daß $\Phi \models \varphi$.

[Geben Sie einen üblichen (informellen) mathematischen Beweis; es ist nicht nötig, eine formale Ableitung im Gentzen-Kalkül zu geben.]

(iv) Beweisen Sie, daß die von Ihnen in (i) gewählte Menge Φ keine endlichen Modelle hat.

[Geben Sie einen üblichen (informellen) mathematischen Beweis; es ist nicht nötig, eine formale Ableitung im Gentzen-Kalkül zu geben. Sie dürfen Rekursion und Induktion über die natürlichen Zahlen verwenden.]

Frage 4. *Ordinalzahlen & Kardinalzahlen.*

(i) Geben Sie die rekursiven Definitionen für die Ordinalzahladdition und -multiplikation.

(ii) Für jede der folgenden Aussagen über Ordinalzahlarithmetik (α, β und γ bezeichnen Ordinalzahlen) geben Sie bitte an, ob sie allgemeingültig ist oder nicht. Falls sie allgemeingültig ist, so schreiben Sie „gilt" (keine Begründung nötig); anderenfalls schreiben Sie „gilt nicht" und geben ein Gegenbeispiel (korrekte Angabe des Gegenbeispiels reicht aus, keine Berechnung nötig).

(a) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$,

(b) $(\alpha \cdot \alpha) \cdot (\beta \cdot \beta) \leq (\beta \cdot \beta) \cdot (\alpha \cdot \alpha)$,

(c) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$,

(d) $(\omega \cdot \omega) \cdot \alpha + (\omega \cdot \omega) \cdot \beta = (\omega \cdot \omega) \cdot \beta + (\omega \cdot \omega) \cdot \alpha$,

(e) falls $\alpha, \beta > 1$, so $\alpha + \beta < (\alpha \cdot \alpha) + (\beta \cdot \beta)$.

(iii) Eine Ordinalzahl γ heißt *Gammazahl*, falls für alle $\alpha, \beta < \gamma$ gilt, daß $\alpha + \beta < \gamma$. Zeigen Sie:

(a) Für jede Ordinalzahl ξ gibt es eine Gammazahl $\gamma > \xi$.

(b) Falls γ eine Gammazahl ist und $\alpha < \gamma$, so gilt $\alpha + \gamma = \gamma$.

(c) Jede unendliche Kardinalzahl ist eine Gammazahl.

[Sie dürfen in der Vorlesung und den Übungen bewiesene Aussagen über Ordinalzahlarithmetik verwenden, wenn Sie sie explizit formulieren.]