Vorkurs Mathematik
Woche 2

September 2016

Janko Latschev und Immanuel van Santen

Inhaltsverzeichnis

1 Die Sprache der Mathematik

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen:
redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache,
und dann ist es alsobald ganz etwas anderes.
Johann Wolfgang von Goethe, *Maximen und Reflexionen*

Um Mathematik zu kommunizieren, bedienen wir uns der natürlichen Sprache. Andererseits gibt es diverse mehr oder weniger strikte interne Regeln, welche zum Teil durchaus vom üblichen Sprachgebrauch abweichen. In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Verwendung der Sprache in der Mathematik ausführlicher beschäftigen.

Zwei prinzipielle Bausteine der mathematischen Kommunikation sind die *Definition* und die *Aussage*.

1.1 Definitionen

Definitionen sind typischerweise Begriffsklärungen, d.h. sie führen oft einen neuen Namen für ein Konzept ein, das dann häufiger benutzt werden soll. Hier einige Beispiele, die wir zum Teil bereits gesehen hatten:

Beispiele 1.

- Ein *Teiler* einer ganzen Zahl n ist eine ganze Zahl m, für die eine ganze Zahl k mit $n = m \cdot k$ existiert.
- Eine *Primzahl* ist eine natürliche Zahl größer als 1, welche nur sich selbst und 1 als positive Teiler besitzt.
- Eine ganze Zahl heißt *gerade*, wenn sie das Produkt einer anderen ganzen Zahl mit 2 ist.
- Drei Punkte einer Ebene heißen *kollinear*, falls es eine Gerade dieser Ebene gibt, welche alle drei Punkte enthält.
- Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph*, falls sie in jedem Punkt $z \in U$ komplex differenzierbar ist.

Wie man schon an den Beispielen sieht, enthalten Definitionen typischerweise Begriffe (in den obigen Beispielen „ganze Zahl“, „natürliche Zahl“, „Produkt“, „Punkt“, „Ebene“, „Gerade“, „Funktion“, „komplex differenzierbar“) sowie eventuell Symbole (z.B. U und $\mathbb{C}$), welche bereits als bekannt vorausgesetzt werden. Eine Definition führt dann darauf aufbauend *einen* neuen Begriff ein. Definitionen sind also ein schöpferischer Akt, dem oft ein längerer Denkprozess vorausgeht. Nicht selten wird eine Definition im Laufe der

Zeit mehrfach verändert, bevor sie ihre „endgültige“ Form erhält. Wichtig ist aber, dass in einem Text oder einer Vorlesung eine einmal getroffene Definition *bindend* ist, d.h. der Autor oder die Vorlesende gibt das Versprechen ab, den Begriff nur in diesem Sinne zu verwenden. Oft entstehen Definitionen aus dem Versuch, ein anschauliches Konzept mathematisch präzise zu fassen. Hat man aber die Definition erst einmal formuliert, tritt die zugrunde liegende Anschauung in den Hintergrund und *man argumentiert nur noch mit den in der Definition formulierten Eigenschaften.*

Eine andere Art der Definition führt neue Symbole ein.

Beispiele 2.
- Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen.
- Sei p_0 der kleinste Primfaktor der natürlichen Zahl $n > 1$.

Definitionen wie die letzte werden oft in Beweisen verwendet, um das dann folgende Argument effizienter formulieren zu können. Diese sind dann *lokaler Natur*, d.h. das entsprechende Symbol wird spätestens am Ende des Beweises wieder „freigegeben“, verliert also dann die verabredete Bedeutung.

1.2 Aussagen

Als *Aussage* bezeichnen wir in der Mathematik einen Satz oder eine Formel, welche entweder wahr oder falsch sein kann.

Beispiele 3.
- $1 + 1 = 2$.
- Wenn die natürliche Zahl n gerade ist, so ist $n + 1$ ungerade.
- Es gibt unendlich viele Primzahlen.
- $5 - 7 > 0$.
- Alle Primzahlen sind ungerade.
- Jede gerade Zahl größer als 2 lässt sich als Summer zweier Primzahlen schreiben.

Hier sind die ersten zwei Aussagen wahr, die nächsten beiden falsch, und von der letzte Aussage (der sogenannten *Goldbachschen Vermutung*) ist nicht bekannt, ob sie wahr oder falsch ist. Wir müssen also den Wahrheitswert eines Satzes nicht kennen, um zu klären, ob es sich um eine Aussage handelt.

Um den Begriff zu verstehen, müssen wir aber auch abgrenzen können, welche Formulierungen und Ausdrücke nicht Aussagen in unserem Sinne sind. Nehmen wir zum Beispiel die Formel

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Diese weckt zwar sicher Erinnerungen, d.h. man assoziiert damit eine aus der Schule bekannte Aussage. *Die Formel ist aber für sich genommen keine Aussage in unserem Sinne*, denn es ist nicht geklärt, was für Objekte a, b und c sein sollen. Haben wir konkrete Zahlenwerte gegeben, z.B. $a = 3$, $b = 4$ und $c = 5$, so wird die Formel zu einer (wahren) Aussage. Auch falls wir aus dem Kontext wüssten, dass a, b und c die Seitenlängen eines rechtwinkligen ebenen Dreiecks sind, wobei $c > a$ und $c > b$ ist, wird die Formel zu einer bekannten *wahren Aussage*. Wird aber behauptet, die Formel gelte für die Seitenlängen a, b und c jedes beliebigen ebenen Dreiecks, oder für die konkreten Zahlen $a = 4$, $b = 7$ und $c = 8$, so wird diese Aussage *falsch*. Streng genommen handelt sich bei der Formel also um eine *Aussageform*, in der noch variable Teile (hier die „Variablen" a, b und c) vorkommen. Werden diese genauer spezifiziert, so wird aus der Aussageform eine Aussage.

Im Rest dieses Kapitels wollen wir die Symbole A, B, C usw. jeweils abstrakt als Platzhalter für eine Aussage verwenden. Hängt eine Aussageform noch von Variablen a, b und c ab, so schreiben wir entsprechend $A(a, b, c)$.

1.3 Wie man aus Aussagen neue Aussagen gewinnt

Die Negation

Am einfachsten erhält man aus einer Aussage A eine neue Aussage, indem man sie negiert.

Definition. Die *Negation* der Aussage A ist wahr, wenn A falsch ist und falsch, wenn A wahr ist. Sie wird oft mit $\neg A$ bezeichnet.

Beispiele 4. Die Negation einer einfachen Aussage ist meist sehr leicht zu formulieren.

- A=„3 ist eine Primzahl."
  $\neg A$=„3 ist keine Primzahl."
- A=„$1 + 1 = 3$"
  $\neg A$=„$1 + 1 \neq 3$" .
- A=„Jedes Dreieck ist rechtwinklig."
  $\neg A$=„Nicht jedes Dreieck ist rechtwinklig."

Verknüpfungen

Eine nützliche Methode, aus Aussagen neue Aussagen zu erzeugen sind die Verknüpfungen mit „und" und „oder".

Definition. Die Aussage *„A und B"* ist wahr, wenn sowohl A also auch B wahr sind, und sonst falsch. Sie wird oft mit $A \wedge B$ bezeichnet.
Die Aussage *„A oder B"* ist wahr, wenn mindestens eine der Aussagen A oder B wahr ist, und falsch, wenn beide falsch sind. Sie wird oft mit $A \vee B$ bezeichnet.

Mit diesen Konventionen sind dann zum Beispiel die Aussagen

$$„\neg(A \text{ und } B)\text{"} \qquad \text{und} \qquad „(\neg A) \text{ oder } (\neg B)\text{"} \tag{1.1}$$

gleichwertig, d.h. sie haben immer denselben Wahrheitswert (sind also entweder beide falsch oder beide wahr).

Beispiel 5. Wir betrachten die Aussagen $A =$„3 ist eine Primzahl“ und $B =$„4 ist eine Primzahl“. Dann lautet die Aussage

- (A und B)=„ 3 und 4 sind Primzahlen.“
- $\neg$(A und B)=„ Es stimmt nicht, dass 3 und 4 Primzahlen sind.“
- $\neg A =$„ 3 ist keine Primzahl.“
- $\neg B =$„ 4 ist keine Primzahl.“
- (($\neg A$) oder ($\neg B$))=„ Eine der Zahlen 3 und 4 ist keine Primzahl.“

Wir sehen also, dass zumindest in diesem Beispiel die Aussagen $C =$„$\neg$(A und B)“ und $D =$„($\neg A$) oder ($\neg B$)“ denselben Wahrheitswert haben.

Bevor wir fortfahren, hier noch eine **Warnung:** In der Umgangssprache wird „oder“ manchmal ohne Kennzeichnung exklusiv verwendet. In den Sätzen

„Wir gehen heute ins Kino oder ins Theater.“ oder

„Ich fahre im Urlaub nach Amerika oder nach Australien.“

wird implizit gesagt, dass nur eine der beiden Alternativen zutrifft. *In der Mathematik ist eine mit „oder“ formulierte Aussage immer einschließend gemeint.* Will man das ausschließende „oder“ formulieren, so muss man explizit *entweder A oder B* sagen.

Die Implikation

Eine in der Mathematik sehr oft verwendete Konstruktion setzt zwei gegebene Aussagen A und B zu einer neuen Aussage „Wenn A, dann B“ zusammen. Man schreibt dann formal auch einfach „$A \Longrightarrow B$“.

Definition. Die *Implikation* $A \Longrightarrow B$ ist falsch, wenn A wahr und B falsch ist, und richtig in allen anderen Fällen.

Beispiele 6. Wir geben einige Beispiele für Implikationen.

- Wenn 3 die Zahl 9007199254740992 teilt, dann ist die Zahl 9007199254740992 keine Primzahl.
- Wenn $x = \pi$, dann gilt $\sin(x) = 0$.
- Wenn das Dreieck D gleichschenklig ist, dann ist D gleichseitig.
- Wenn die natürliche Zahl n ungerade ist, dann ist sie ohne Rest durch 3 teilbar.

Streng genommen sind die letzten drei Implikationen Aussageformen, denn sie enthalten noch Variablen: die Zahl x, das Dreieck D oder die natürliche Zahl n. In einem Kontext, in dem diese Objekte bereits eingeführt wurden, d.h. wenn wir schon wissen, von welcher Zahl x oder welchem Dreieck D oder welcher natürlichen Zahl n die Rede ist, dann sind unsere Beispiele tatsächlich gültige Implikationen, welche zwei nachprüfbare Aussagen verknüpfen.

In einer Implikation $A \Longrightarrow B$ nennt man die Aussage A die *Voraussetzung*, und die Aussage B die *Behauptung*. Über den Wahrheitsgehalt dieser beiden Teile macht die Implikation selbst keine Aussage. Insbesondere *folgt aus einer falschen Aussage jede andere Aussage.* Zum Beispiel ist die Implikation

$$\textit{Wenn } -1 = 1, \textit{ dann gilt } 5 = 8.$$

als Implikation eine wahre Aussage, auch wenn die beiden Teile falsch sind. Wir werden bald sehen, warum dies eine sehr nützliche Konvention ist.

In mathematischen Texten werden nicht immer die Signalworte *Wenn ..., dann ...* verwendet, um Implikationen auszudrücken. Hier sind einige Beispiele - können Sie diese als „wenn ..., dann ...“-Sätze umformulieren?

Beispiele 7. Die folgenden Aussagen sind wahr. Wieder nehmen wir an, dass die vorkommenden Symbole bereits mit konkreten Werten belegt sind.

- Falls x eine positive reelle Zahl ist, so ist auch x^2 eine positive reelle Zahl.
- Die natürliche Zahl n ist nur dann durch 4 teilbar, wenn sie durch 2 teilbar ist.
- Damit das Viereck $ABCD$ im dreidimensionalen Raum in einer Ebene liegt, müssen sich die beiden Diagonalen AC und BD schneiden.

Auch bei der Implikation gibt es wichtige Unterschiede zur umgangssprachlichen Verwendung. Betrachten wir als Beispiel folgenden Satz, den vielleicht Eltern zu Ihrem Kind sagen (wie sinnvoll solche Ansagen sind, wollen wir hier nicht diskutieren):

Wenn Du jetzt Dein Zimmer aufräumst, dann gehen wir nachher Eis essen.

Typischerweise ist in einer solchen Situation die Aussage *„Wenn Du Dein Zimmer nicht aufräumst, dann gibt es auch kein Eis.“* gleich mit gemeint. Streng logisch sind diese beiden Aussagen aber erst einmal unabhängig, d.h. aus der einen lässt sich die andere nicht herleiten.

Die Negation der Implikation

Wir haben bereits allgemein erklärt, wie man Aussagen negiert, und wir haben Implikationen betrachtet. Nun ist es nicht schwer, die Negation einer Implikation zu formulieren - dazu müssen wir die beiden bekannten Regeln nur verbinden. Wir erinnern uns: die Implikation „$A \Longrightarrow B$“ ist wahr, wenn entweder A falsch ist (und B beliebig) oder auch wenn A und B beide wahr sind, und ist falsch, wenn A wahr ist und B falsch. Durch Negation erhalten wir also die neue Regel: Die negierte Implikation $\neg(A \Longrightarrow B)$ ist wahr, wenn A wahr und B falsch ist, und falsch in allen anderen Fällen.

Beispiel 8. Für die Aussagen A = „3 ist eine Primzahl“ und B = „4 ist eine Primzahl“ haben wir

- $(A \Longrightarrow B)$ = „Wenn 3 eine Primzahl ist, dann ist auch 4 eine Primzahl.“

- $(\neg(A \Longrightarrow B))$ =„Es stimmt nicht, dass wenn 3 eine Primzahl ist, dann auch 4 eine Primzahl sein muss.“ Schöner formuliert man das als: „Aus der Tatsache, dass 3 eine Primzahl ist, folgt nicht, dass 4 eine Primzahl ist.“

Die ursprüngliche Implikation war hier falsch, die negierte Implikation ist wahr.

Man kann sich leicht überzeugen, dass die Negation der Implikation $A \Longrightarrow B$ gleichbedeutend mit der Aussage *„A und nicht B“* ist. Vergleichen wir dies noch einmal mit dem Beispiel vom Aufräumen und Eis essen, so sehen wir, dass die logische Negation der Aussage *„Wenn Du jetzt Dein Zimmer aufräumst, dann gehen wir nachher Eis essen.“* die Aussage *„Du räumst jetzt Dein Zimmer auf und wir gehen nachher nicht Eis essen.“* ist, aus der Sicht des Kindes keine besonders attraktive Aussicht.
Spannender (und in der Mathematik sehr wichtig) ist die Kontraposition der Implikation $A \Longrightarrow B$, d.h. die Aussage $(\neg B) \Longrightarrow (\neg A)$. Diese ist in der Tat äquivalent zur ursprünglichen Implikation, d.h. sie ist genau dann wahr, wenn die Implikation $A \Longrightarrow B$ wahr ist, und falsch, wenn diese falsch ist. Diese Beobachtung benutzt man oft in Beweisen: statt direkt die Implikation $A \Longrightarrow B$ zu zeigen, beweist man stattdessen, dass $(\neg B) \Longrightarrow (\neg A)$.

Beispiele 9. Hier zwei Beispiele für (wahre) Implikationen und ihre Kontraposition. Welche Aussagen können Sie leichter beweisen?

- $A \Longrightarrow B$: Ist eine natürliche Zahl durch 3 teilbar, so ist auch ihre Quersumme durch 3 teilbar.
  $(\neg B) \Longrightarrow (\neg A)$: Ist die Quersumme einer natürlichen Zahl nicht durch 3 teilbar, so ist auch die Zahl selbst nicht durch 3 teilbar.

- $A \Longrightarrow B$: Wenn das Dreieck D gleichseitig ist, dann ist es auch gleichschenklig.
  $(\neg B) \Longrightarrow (\neg A)$: Wenn das Dreieck D nicht gleichschenklig ist, dann ist es auch nicht gleichseitig.

Bemerkung 10. Im Zusammenhang mit Implikationen spricht man manchmal auch von einer *notwendigen Bedingung* oder einer *hinreichenden Bedingung*: Ist die Implikation $A \Longrightarrow B$ wahr, so ist B eine notwendige Bedingung für A, und A ist eine hinreichende Bedingung für B.

In unserem Alltagsbeispiel ist die Bedingung *„Du räumst jetzt Dein Zimmer auf“* hinreichend für *„wir gehen nachher Eis essen“* (rein logisch aber nicht notwendig). Hier sind Logik und Alltag also durchaus im Einklang. Die Kontraposition von *„Wenn Du jetzt Dein Zimmer aufräumst, dann gehen wir nachher Eis essen.“* die Aussage *„Wenn wir nachher nicht Eis essen gehen, dann hast Du jetzt Dein Zimmer nicht aufgeräumt.“*. Auch dies ist logisch gleichwertig zur ursprünglichen Aussage.

Äquivalenz von Aussagen

Wir hatten ja bereits gesehen, dass manchmal zwei Aussagen A und B gleichwertig sind. Mit Hilfe der Implikation kann man dass als „$A \Longrightarrow B$ und $B \Longrightarrow A$“ ausdrücken, wie man schnell nachprüft. Man sagt in solchen Fällen auch, die Aussagen A und B seien *äquivalent*, und schreibt dafür $A \iff B$, gesprochen „A genau dann, wenn B“. Manchmal sagt man dafür auch „A dann und nur dann, wenn B“.

Beispiel 11.
- Sei n eine natürliche Zahl. Die Zahl n ist genau dann durch 3 teilbar, wenn die Quersumme (die Summe der Ziffern von n im Dezimalsystem) durch 3 teilbar ist.
- Sei p eine natürliche Zahl größer 1. Die Zahl p ist genau dann eine Primzahl, wenn p nur die positiven Teiler 1 und p besitzt.

Unser zweites Beispiel verdeutlicht noch einmal einen wichtigen Aspekt von Definitionen: sie führen einen neuen Begriff ein, indem sie diesen als äquivalent zu einer anderen (meist längeren) Aussage erklären.[1]

Unter den Äquivalenzen gibt es eine besondere Gruppe, die sogenannten *Tautologien.* Diese sind zusammengesetze Aussagen, welche unabhängig vom Wahrheitswert der darin vorkommenden einzelnen Bestandteile *immer wahr sind.* Solche aussagenlogischen Formeln spielen bei logischen Schlussfolgerungen eine wichtige Rolle, wie wir später sehen werden, wenn wir uns mit mathematischen Beweisen auseinandersetzen.

Satz 12. *Die folgenden Aussagen sind Beispiele für Tautologien, d.h. für beliebige Aussagen A, B und C immer wahr:*

- $A \textit{ oder } \neg A$
- $\neg(A \textit{ und } \neg A)$
- $\neg\neg A \iff A$
- $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$
- $(A \textit{ und } (A \implies B)) \implies B$
- $(A \textit{ und } (\neg B \implies \neg A)) \implies B$
- $((A \implies B) \textit{ und } (B \implies C)) \implies (A \implies C)$
- $(A \textit{ und } B) \iff (B \textit{ und } A)$
  $(A \textit{ oder } B) \iff (B \textit{ oder } A)$
- $((A \textit{ und } B) \textit{ und } C) \iff A \textit{ und } (B \textit{ und } C))$
  $((A \textit{ oder } B) \textit{ oder } C) \iff A \textit{ oder } (B \textit{ oder } C))$
- $A \textit{ und } (B \textit{ oder } C)) \iff (A \textit{ und } B) \textit{ oder } (A \textit{ und } C)$
  $A \textit{ oder } (B \textit{ und } C)) \iff (A \textit{ oder } B) \textit{ und } (A \textit{ oder } C)$

[1] In der Formulierung von Definitionen wird das „genau dann” oft weggelassen. Dies ist aus rein logischer Sicht bedenklich, sprachlich aber für manche Ohren angenehmer, und daher die Ausnahme, die die Regel bestätigt.

- $\neg(A \textit{ und } B) \iff (\neg A \textit{ oder } \neg B)$

  $\neg(A \textit{ oder } B) \iff (\neg A \textit{ und } \neg B)$

Um diesen Satz zu beweisen, muss man für jeden einzelnen Punkt überprüfen, dass tatsächlich die angegebenen Verknüpfungen für alle möglichen Wahrheitswerte der Aussagen A, B und C jeweils äquivalent sind. Für die meisten dieser Aussagen ist dies auch nicht schwer, wenn man sie in Alltagssprache übersetzt und in Ruhe darüber nachdenkt. Eine Möglichkeit, einen systematischen Beweis zu geben, ist das Aufstellen von sogenannten *Wahrheitstabellen*. Wir betrachten als Beispiel die fünfte Zeile unserer Liste:

$$(A \text{ und } (A \Longrightarrow B)) \Longrightarrow B.$$

Jede der beiden Aussagen A oder B kann wahr oder falsch sein, wir erhalten also 4 mögliche Kombinationen. in allen diesen Fällen können wir nun für die einzelnen Bestandteile der gesamten Aussage den Wahrheitswert bestimmen. Durch Auflösung der Verknüpfungen erhalten wir schließlich den Wahrheitswert unserer Gesamtaussage:

A	B	$A \Longrightarrow B$	$A \wedge (A \Longrightarrow B)$	$(A \wedge (A \Longrightarrow B)) \Longrightarrow B$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

In der rechten Spalte sehen wir, dass die zu beweisende Aussage in allen Fällen wahr ist. Dies entspricht genau der Behauptung, dass es sich um eine Tautologie handelt.

Die Quantoren „Für alle“ und „Es gibt“

Wir haben bereits Aussagen des folgenden Typs erwähnt:

- Für jede natürliche Zahl n teilt 3 das Produkt $n(n+1)(n+2)$.
- Ist p eine Primzahl, so ist $p+1$ gerade.
- Es existiert ein ebenes Dreieck, dessen Innenwinkelsumme größer als 180° ist.
- Es existiert eine natürliche Zahl n, die kleiner ist als jede andere natürliche Zahl.

Diesen Aussagen enthalten wieder eine Aussageform $A(x)$, welche noch eine Variable x enthält – in unseren Beispielen die natürliche Zahl n oder die Primzahl p oder das ebene Dreieck. Statt wie vorher implizit anzunehmen, dass diese Symbole aus dem Kontext schon erklärt sind, werden die Aussageformen hier zu einer Aussage gemacht, indem mit Hilfe eines der Quantoren „Für alle“ oder „Es gibt“ die zulässigen Werte der Variablen spezifiziert werden. In logischen Formeln benutzt man die Symbole $\forall$ und $\exists$ für diese beiden Quantoren, also:

$$\forall\, x \in X \ldots \quad \text{bedeutet} \quad \text{„Für alle } x \in X \ldots\text{„}$$

und

$$\exists\, x \in X \dots \quad \text{bedeutet} \quad \text{„Es existiert ein } x \in X \dots\text{„}$$

In unserem Beispiel ist die erste Aussage wahr. Die zweite Aussage ist falsch, wie das Gegenbeispiel $p = 2$ zeigt. Die dritte Aussage ist ebenfalls falsch, denn für jedes ebene Dreieck ist die Innenwinkelsumme bekanntlich gleich 180°. Die vierte Aussage ist wieder wahr, denn 1 ist eine Zahl mit der verlangten Eigenschaft.
Wir betrachten zum Schluss noch ein weiteres Beispiel:

Für jede natürliche Zahl $n < 0$ ist $n + 1$ irrational.

Wir verlangen hier von n zwei Dinge: es soll eine natürliche Zahl sein, und es soll negativ sein. Da diese Bedingungen nicht beide gleichzeitig erfüllbar sind, ist die Menge der zulässigen Werte für n die *leere Menge*.

In der Mathematik sind *alle* Aussagen der Form $\forall x \in M : A(x)$ wahr, wenn M die leere Menge ist.

Insbesondere ist also auch die gerade erwähnte Aussage wahr. Dies ist sehr nützlich und auch sinnvoll, da es ja nichts gibt, was der Aussage widerspricht. Allerdings weicht diese Konvention vom Gebrauch in der Umgangssprache ab. Wenn Sie zum Beispiel sagen

„Ich habe in meiner Geldbörse nur 1-Euro-Münzen.“,

so werden die meisten Menschen davon ausgehen, dass Sie momentan tatsächlich mehrere dieser Münzen besitzen. Nur mit den Gesetzen der Logik lässt sich dies aus Ihrer Aussage aber nicht schließen, d.h. innerhalb der Mathematik ist dieser Satz auch wahr, falls Sie *gar keine Münzen* oder *nur eine 1-Euro-Münze* in Ihrer Geldbörse haben.

Negation von Aussagen mit Quantoren

Wie negiert man nun Aussagen, welche Quantoren enthalten? Ein kurzer Blick auf die Wahrheitswerte zeigt: die Negation der Aussage *„Für alle x gilt die Aussage $A(x)$.“* ist die Aussage *„Es gibt ein x, so dass die Aussage $A(x)$ nicht gilt.“*. Analog ist die Negation der Aussage *„Es existiert ein x, so dass die Aussage $A(x)$ gilt.“* die Aussage *„Für alle x gilt die Aussage $A(x)$ nicht.“* In Formeln sieht das so aus

$$\begin{aligned} \neg(\forall x : A(x)) \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists x : \neg A(x) \\ \neg(\exists x : A(x)) \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall x : \neg A(x) \end{aligned}$$

Beispiele 13. Im Folgenden ist jeweils die ursprüngliche Aussage wahr und die Negation falsch.

- Die Negation der Aussage *„Jede natürliche Zahl größer als 1 ist durch eine Primzahl teilbar.“* ist die Aussage *„Es gibt eine natürliche Zahl größer als 1, die durch keine Primzahl teilbar ist.“*

- Die Negation der Aussage *„Es gibt reelle Zahlen, welche nicht rational sind.“* ist die Aussage *„Jede reelle Zahl ist rational.“*

Dies hat unmittelbare praktische Bedeutung: Um eine $\forall$-Aussage zu widerlegen, genügt es, ein einziges Gegenbeispiel zu finden. Um hingegen eine $\exists$-Aussage zu widerlegen, muss man etwas über *alle* betrachteten Objekte zeigen.

Man kann Quantoren auch kombinieren, und erhält somit schnell relativ komplexe Aussagen.

Beispiele 14. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine natürliche Zahl m mit $m > n$.
- Es gibt eine natürliche Zahl n, so dass für jede natürliche Zahl m gilt, dass $m > n$.
- Für jede natürliche Zahl n und jede natürliche Zahl m gilt $m > n$.
- Es gibt eine natürliche Zahl n, so dass eine natürliche Zahl m mit $m > n$ existiert.

Bei der Negation solcher Verkettungen von Quantoren geht man relativ mechanisch vor, indem man von „außen" nach „innen" die obigen Regeln anwendet:

$$\begin{aligned}\neg(\forall x\,\exists y\,\forall z : A(x,y,z)) &\text{ ist äquivalent zu } \exists x : \neg(\exists y\,\forall z : A(x,y,z))\\ &\text{ und äquivalent zu } \exists x\,\forall y : \neg(\forall z : A(x,y,z))\\ &\text{ und äquivalent zu } \exists x\,\forall y\,\exists z : \neg(A(x,y,z))\end{aligned}$$

Konkret sieht dass dann so aus.

Beispiel 15. Die Negation der Aussage

„Für alle $x \in (a,b)$ und für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so dass für alle $y \in (a,b)$ mit $|x-y| < \delta$ gilt, dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$."

ist die Aussage

„Es gibt ein $x \in (a,b)$ und ein $\epsilon > 0$, so dass für jedes $\delta > 0$ ein $y \in (a,b)$ mit $|x-y| < \delta$ existiert, für dass $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$ gilt."

Wie immer nehmen wir an, dass die auftretenden Symbole im Kontext bereits hinreichend erklärt wurden. Wie Sie in der Analysis sehen werden, beschreibt die Aussage die Stetigkeit einer Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ auf dem gesamten Intervall $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$. Die Negation formuliert also die Bedingung „f ist in (a,b) nicht (überall) stetig".

2 Abbildungen und Funktionen

Der Begriff der Abbildung ist absolut zentral für die Mathematik, und Funktionen bilden eine wichtige Beispielklasse unter den Abbildungen. Intuitiv geht es darum, Zusammenhänge zwischen verschiedenen variablen Objekten oder „Größen" auszudrücken.

Wir beginnen mit einigen Beispielen von Zuordnungen, deren Gemeinsamkeiten wir danach formalisieren wollen.

Beispiele 16. (a) Zu einem festen Zeitpunkt können wir jedem Punkt auf der Erdoberfläche den in diesem Moment dort herrschenden Luftdruck zuordnen. Alternativ können wir auch in einem festen Messpunkt in einer gewissen Zeitspanne den Luftdruck aufzeichnen. Schließlich können wir die beiden Alternativen auch kombinieren, und jedem Paar (Zeitpunkt, Ort) den gemessenen Luftdruck zuordnen.

(b) Jedem Auto mit Hamburger Kennzeichen können wir zu jedem Zeitpunkt innerhalb der nächsten Stunde seine Geschwindigkeit zuordnen.

(c) Jedem Dreieck in einer Ebene können wir seinen Schwerpunkt zuordnen.[1]

(d) Jedem Zeitpunkt in einer gewissen Zeitspanne können wir die in diesem Moment auf einer vorher ausgewählten (Digital-)Uhr angezeigte Uhrzeit zuordnen.

(e) Einem Paar natürlicher Zahlen a und b kann man ihre Summe $a + b$ zuordnen.

2.1 Etwas mehr über Mengen

Wir hatten bereits am Anfang des Vorkurses kurz etwas über Mengen gesagt. Zur Erinnerung, hier noch einmal die Definition.

Definition. Eine *Menge* ist eine Sammlung wohlunterscheidbarer Objekte. Die einzelnen Bestandteile einer Menge nennt man die *Elemente der Menge.*

Bisher waren unsere Beispiele für Mengen vor allem Mengen von Zahlen. In der Mathematik fasst man aber auch viele andere Objekte zu Mengen zusammen. In den einführenden Beispielen oben tauchten zum Beispiel die folgenden Mengen auf:

- in (a) die Menge der Punkte der Erdoberfläche, die Menge der möglichen Werte für den Luftdruck, und auch die Menge der Zeiten in einer gewissen Zeitspanne. Nach Wahl von Maßeinheiten können die letzten beiden Mengen mit Teilmengen der reellen Zahlen identifiziert werden, die erste hingegen scheint etwas komplizierter.

[1] Stellt man sich das Dreieck aus einem homogenen Material gefertigt vor, so ist der Schwerpunkt derjenige Punkt, an dem man es auf einem spitzen Stock balancieren kann.

- in (b) die Menge der Autos mit Hamburger Kennzeichen und die Menge der Zeiten innerhalb der nächsten Stunde sowie die Menge der möglichen Geschwindigkeiten.
- in (c) die Menge der Dreiecke der gegebenen Ebene sowie die Menge der Punkte in dieser Ebene (die ja alle als Schwerpunkt auftreten können).
- in (d) die Menge der Zeiten in einer gewissen Zeitspanne (die wir uns wieder als Intervall in $\mathbb{R}$ vorstellen), und die Menge der von unserer Digitaluhr anzeigbaren Uhrzeiten (diese Menge ist endlich).
- in (e) die Menge der Paare natürlicher Zahlen sowie die Menge der natürlichen Zahlen.

Bei manchen dieser Mengen ist es unpraktisch, alle Elemente aufzuzählen. Oft kann man stattdessen die Elemente der Menge durch ihre Eigenschaften charakterisieren. Wenn wir zum Beispiel die Menge aller Primzahlen, welche kleiner als 10^{30} sind angeben wollen, so können wir dafür

$$\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ ist Primzahl und } p < 10^{30}\}$$

schreiben. Analog schreiben wir

$$\{\text{Symbole der Form } h : m \mid h, m \in \mathbb{N}_0, 0 \leq h \leq 23, 0 \leq m \leq 59\}$$

für die Menge der auf unserer Digitaluhr anzeigbaren Uhrzeiten.[2] Manchmal benutzt man auch statt des Trennstrichs | einen Doppelpunkt, wenn es die Lesbarkeit erhöht. Zum Beispiel bezeichnet

$$\{x \in \mathbb{R} : |x| < 100\}$$

die Menge der reellen Zahlen, deren Betrag kleiner als 100 ist, also das Intervall $(-100, 100)$.

Man kann aus einer oder mehreren Mengen auf verschiedene Art neue Mengen konstruieren. Sei zum Beispiel F die Menge aller Früchte an einem Verkaufsstand eines Wochenmarktes. Dann bezeichnet

$$A = \{x \in F \mid x \text{ ist gelb }\}$$

die Teilmenge der gelben Früchte, und

$$B = \{x \in F \mid x \text{ ist ein Apfel }\}$$

die Teilmenge der Äpfel. Der *Durchschnitt* $A \cap B$ der Mengen A und B ist die Menge aller Objekte, welche in beiden Mengen enthalten sind, also hier

$$A \cap B = \{x \in F \mid x \text{ ist ein gelber Apfel }\}.$$

Zwei Mengen A und B heißen *disjunkt*, wenn ihr Durchschnitt $A \cap B$ die leere Menge ist. Dies könnte in unserem Beispiel der Fall sein, wenn der Marktstand keine gelben Äpfel im Angebot hat.

[2] Wenn wir genauer sein wollen, könnten wir noch dazuschreiben, dass die Zahlen stets zweistellig, notfalls mit 0 beginnend, dargestellt sein sollen.

Die *Vereinigung* $A \cup B$ der Mengen A und B ist die Menge aller Objekte, welche in mindestens einer der Mengen enthalten sind. In unserem Beispiel ist dies

$$A \cup B = \{x \in F \mid x \text{ ist gelb oder ein Apfel } \}.$$

Die *Differenz* $A \setminus B$ zweier Mengen ist die Menge aller Objekte, welche in A aber nicht in B enthalten sind. In unserem Beispiel ist dies

$$A \setminus B = \{x \in F \mid x \text{ ist gelb, aber kein Apfel } \}.$$

Um Mengen anschaulich darzustellen, verwenden wir manchmal abstrakte Diagramme, in denen die einzelnen Mengen als ebene Figuren dargestellt sind. Überlappende Regionen stellen dabei Durchschnitte von Mengen dar.

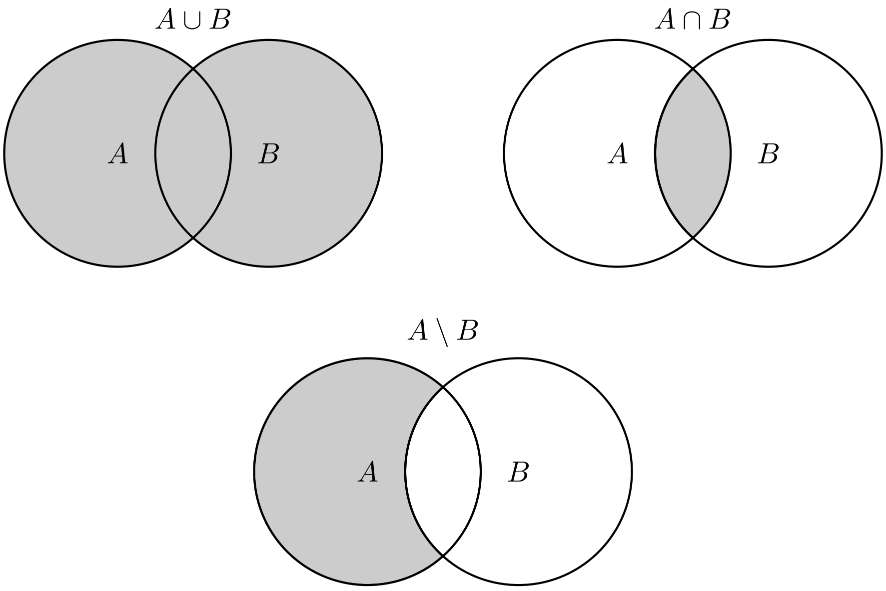


Abbildung 2.1: Vereinigung, Durchschnitt und Differenz von Mengen A und B

Eine andere nützliche Konstruktion einer neuen Menge aus einer bekannten Menge M ist *die Menge aller Teilmengen von M*, welche man oft mit $\mathcal{P}(M)$ (für Potenzmenge) bezeichnet. Wir erwähnen dieses Beispiel hier, um anzumerken, dass die Elemente einer Menge selbst auch Mengen sein können. So gilt zum Beispiel

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Es ist wichtig, in der Notation zwischen Elementen und Teilmengen immer klar zu unterscheiden. So gilt zum Beispiel $1 \in \{1,2,3\}$, *aber nicht* $\{1\} \in \{1,2,3\}$. Andererseits gilt $\{1\} \subseteq \{1,2,3\}$, *aber nicht* $1 \subseteq \{1,2,3\}$. Schließlich gilt $\{1\} \in \mathcal{P}(\{1,2,3\})$, *aber nicht* $1 \in \mathcal{P}(\{1,2,3\})$.

Bemerkung 17. Den letzten Absatz sollten Sie so oft lesen und so lange mit anderen Studierenden diskutieren, bis er Ihnen restlos klar ist. Dies wird Ihnen später viel Verwirrung und vielleicht auch verlorene Punkte bei Übungsaufgaben und Klausuren ersparen.

Schließlich ist es immer wieder einmal nützlich, geordnete Paare von Elementen gegebener Mengen zu betrachten. Sind also X und Y zwei Mengen, so definieren wir die *Produktmenge* $X \times Y$ als die Menge aller geordneter Paare (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$, in Symbolen

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Beispiel 18. In den Vorlesungen über Geometrie und lineare Gleichungssysteme hatten wir über die Ebene als $\mathbb{R}^2$ gesprochen. in unserer neuen Notation von Produktmengen gilt

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

2.2 Abbildungsbegriff

Die folgende Definition abstrahiert die wesentlichen Eigenschaften dieser Zuordnungen und macht daraus einen mathematischen Begriff.

Definition. Eine *Abbildung* f von einer Menge X in eine Menge Y (wir schreiben dafür $f : X \to Y$) ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zuordnet. Wir schreiben auch $y = f(x)$ für den *Wert* der Abbildung f im Punkt $x \in X$.

X heißt *Definitionsbereich* der Abbildung f, und Y heißt *Wertebereich* der Abbildung.

Beispiele 19. Wir betrachten noch einmal die Zuordnungen aus Beispiel 16.

(a) Im ersten Fall war der Definitionsbereich die Menge der Punkte der Erdoberfläche, und der Wertebereich ist die Menge der *potentiell möglichen Werte* für den Luftdruck. Diese kann man (z.B.) mit den positiven reellen Zahlen identifizieren. Im zweiten Fall war der Definitionsbereich ein gewisses Zeitintervall, und der Wertebereich wieder die Menge der möglichen Werte für den Luftdruck.

(b) Hier war der Definitionsbereich die (endliche) Menge der Autos mit Hamburger Kennzeichen, und der Wertebereich die Menge der möglichen Geschwindigkeiten. Dies ist wieder ein gewisses Teilintervall der reellen Zahlen, welches als Teil der Definition der Abbildung gewählt wird.

(c) Hier ist der Definitionsbereich die Menge aller Dreiecke der gegebenen Ebene, und der Wertebereich ist die Menge aller Punkte derselben Ebene.

(d) Hier ist der Definitionsbereich ein gewisses Zeitintervall, und der Wertebereich sind alle von unserer ausgewählten Uhr anzeigbaren Uhrzeiten (Zum Beispiel die Uhrzeiten von $00:00$ bis $23:59$, eine Menge mit $24 \cdot 60 = 1440$ Elementen).

(e) Bei der Addition natürlicher Zahlen ist der Definitionsbereich $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und der Wertebereich wird typischerweise auch als $\mathbb{N}$ gewählt, obwohl auch die natürlichen Zahlen

≥ 2 als Wertebereich in Frage kämen, da die Summe zweier natürlicher Zahlen mindestens 2 ist.

Wie wir sehen, haben wir bei der konkreten Definition einer Abbildung einen gewissen Spielraum, was Definitions- und Wertebereich angeht. Um Unklarheiten zu vermeiden gibt man diese also bei der Einführung einer neuen Abbildung normalerweise explizit an. Ist der Definitionsbereich sehr klein, so kann man eine Abbildung auch als Wertetabelle schreiben. Folgende Tabelle beschreibt etwa eine Abbildung $p : X \to Y$ mit $X = Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

x	1	2	3	4	5
$p(x)$	2	3	4	5	1

Man beachte aber, dass die Tabelle zwar den Definitionsbereich der Abbildung, nicht aber den Wertebereich deutlich macht. Dieser muss also zusätzlich mit angegeben werden, wenn er nicht aus dem Kontext klar ist.

Definition. Abbildungen, deren Wertebereich ein Zahlbereich ist (also eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ oder sogar $\mathbb{C}$, den komplexen Zahlen) nennt man auch *Funktion*.

Funktionen werden oft (aber nicht immer) durch Angabe einer Funktionsvorschrift definiert. Um solche Definitionen zu kennzeichnen, benutzt viele Autoren hier *einmal* das Zeichen „:=“. In Beispielen sieht das dann wie folgt aus.

Beispiele 20.

- Wir definieren eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x^{2016} - 2016x$.
- Wir definieren eine Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $g(x, y, z) := x + y + z - 1$.
- Der *Absolutbetrag* ist die Funktion $|\,.\,| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

  definiert ist.

Funktionen, deren Definitions- und Wertebereich Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind, werden oft durch einen *Funktionsgraphen* veranschaulicht. Sind $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ und $f : X \to Y$, so ist der Funktionsgraph gerade die Teilmenge

$$\operatorname{graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y \subseteq \mathbb{R}^2$$

aller Punkte der Ebene deren erste Koordinate in X liegt und deren zweite Koordinate gerade der Funktionswert der ersten Koordinate ist. Man bemerke, dass die Definition für beliebige Mengen X und Y funktioniert.

Definition. Seien X und Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

- Das *Bild* einer Teilmenge $A \subseteq X$ ist die Menge

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}.$$

  Insbesondere bezeichnet man die Teilmenge $f(X) \subseteq Y$ als *das Bild von f*.

- Das *Urbild* einer Teilmenge $B \subset Y$ ist die Teilmenge

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subseteq X.$$

Hat die Teilmenge $B \subset Y$ nur ein Element, d.h. $B = \{y\} \subset Y$, so schreibt man zur besseren Lesbarkeit ausnahmsweise nur $f^{-1}(y)$ statt $f^{-1}(\{y\})$. Für das Urbild $f^{-1}(Y)$ gibt es keinen speziellen Namen, da stets $f^{-1}(Y) = X$ gilt (warum?).

Beispiele 21. Wir betrachten noch einmal einige Funktionen aus den vorherigen Beispielen.

(a) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus Beispiel 20 zeigt eine kurze Rechnung, dass das Bild $f(\mathbb{R})$ von f gerade die Teilmenge $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -2015\}$ ist, das Bild $f([0,1])$ ist gerade das Intervall $[-2015, 0]$. Das Urbild der Teilmenge $(-3000, -2500)$ ist leer, und das Urbild des Punktes $0 \in \mathbb{R}$ ist die Teilmenge $\{0, \sqrt[2015]{2016}\}$. Können Sie diese Behauptungen beweisen?

(b) Das Bild der Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ aus Beispiel 20 ist ganz $\mathbb{R}$. Was ist das Urbild des Punktes $0 \in \mathbb{R}$ unter g?

(c) Das Bild des Absolutbetrages ist die Teilmenge $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$. Das Urbild eines Intervalles $[a, b]$ mit $0 < a < b$ besteht aus der Vereinigung der beiden Teilintervalle $[-b, -a] \cup [a, b] \subset \mathbb{R}$. Insbesondere hat jedes $x > 0$ das Urbild $\{-x, x\}$, während das Urbild der Null nur aus der Null besteht, und das Urbild von $x < 0$ leer ist.

(d) Ist $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so können wir eine neue Abbildung $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ durch $H(x) = (x, h(x))$ definieren. Das Bild dieser Abbildung H ist dann gerade der Graph der Funktion h in $\mathbb{R}^2$.

Wichtig für den Begriff der Abbildung ist es, dass *jedem* Element aus dem Definitionsbereich *genau ein* Element des Wertebereichs zugeordnet wird. Wie die Beispiele zeigen, kann dabei *verschiedenen* Elementen des Definitionsbereichs durchaus *dasselbe* Element des Wertebereichs zugeordnet werden. Auch beschreibt der Wertebereich nur die festgelegte Menge *möglicher* Werte, d.h. nicht jedes Element des Wertebereichs muss tatsächlich auch als Wert vorkommen.

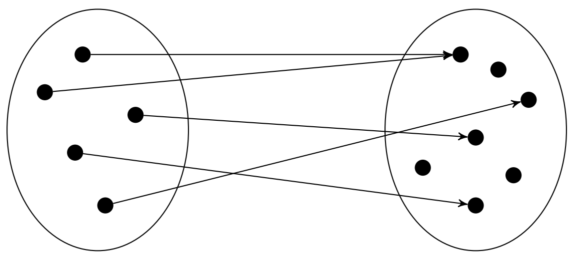


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung einer Abbildung. Der Definitionsbereich ist links, der Wertebereich rechts dargestellt.

Manchmal ist es aber durchaus nützlich anzunehmen, dass tatsächlich jedes Element des Wertebereichs einer Abbildung $f : X \to Y$ ein Bildpunkt von f ist, d.h. $f(X) = Y$ gilt. Abbildungen mit dieser Eigenschaft nennt man *surjektiv*. Entsprechen andererseits verschiedenen Elementen von X stets verschiedene Bildpunkte in Y, so nennt man die Abbildung $f : X \to Y$ *injektiv*. Eine Abbildung, welche beide diese Bedingungen erfüllt, nennt man *bijektiv*. Für bijektive Abbildungen $f : X \to Y$ gilt:

- zu jedem $x \in X$ gibt es genau ein $y \in Y$ mit $f(x) = y$ (dies gilt nach Definition für *jede* Abbildung), und
- zu jedem $y \in Y$ gibt es genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ (dies sind die beiden Bedingungen „f ist injektiv“ (es gibt höchstens ein $x \dots$) und „f ist surjektiv“ (es gibt mindestens ein $x \dots$)).

Unter diesen Voraussetzungen ist die Abbildung $f : X \to Y$ *umkehrbar*: es existiert dann eine Abbildung $g : Y \to X$ so dass die folgenden Beziehungen gelten:

$$\forall x \in X : g(f(x)) = x \qquad \text{und} \qquad \forall y \in Y : f(g(y)) = y.$$

In diesem Fall nennt man die Abbildung $g : Y \to X$ die *Umkehrabbildung* oder *inverse Abbildung* zu $f : X \to Y$. Diese wird meist mit $f^{-1} : Y \to X$ bezeichnet.

Beispiel 22. Wir betrachten noch einmal die Abbildung $p : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$, welche durch die Tabelle

x	1	2	3	4	5
$p(x)$	2	3	4	5	1

definiert wird. Diese Abbildung ist umkehrbar, und die Umkehrabbildung $p^{-1} : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ist gegeben durch

y	1	2	3	4	5
$p^{-1}(y)$	5	1	2	3	4

In solchen einfachen Beispielen mit Wertetabelle erhält man also, wenn überhaupt möglich, die Umkehrabbildung, indem man „die Zeilen vertauscht“.

Beispiele 23. (a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = x + x^3$ ist streng monoton wachsend (aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$) und nimmt jeden Wert $y \in \mathbb{R}$ an. Sie besitzt also eine Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die man allerdings keine elementare Formel angeben kann. Dies ist „im wirklichen Leben“ durchaus typisch.

(b) Die Funktion $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = x^2$, besitzt keine Umkehrfunktion, da negative Zahlen im Wertebereich kein Urbild und die positiven Zahlen zwei Urbilder besitzen. Schränkt man die Funktion aber ein zu einer Funktion $\widetilde{q} : [0, \infty) \to [0, \infty)$, so verschwinden diese beiden Probleme. Die Umkehrfunktion dieser Einschränkung $\widetilde{q}$ ist natürlich nichts anderes als die Quadratwurzel $\sqrt{} : [0, \infty) \to [0, \infty)$.

(c) Unsere Abbildung, welche jedem ebenen Dreieck seinen Schwerpunkt zuordnet, hat als Bild den gesamten Wertebereich, denn jeder Punkt der Ebene kann als Schwerpunkt auftreten. Allerdings ist die Abbildung nicht umkehrbar, denn verschiedene Dreiecke können durchaus denselben Schwerpunkt besitzen.

Bei der Diskussion der Umkehrabbildung trat bereits eine Konstruktion auf, die wir wegen ihrer Wichtigkeit noch einmal explizit herausstellen wollen.

Definition. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Dann definieren wir ihre *Verknüpfung* (oder *Komposition*) als die Abbildung $g \circ f : X \to Z$ (sprich: „g nach f“ oder „g verknüpft mit f“), gegeben durch

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

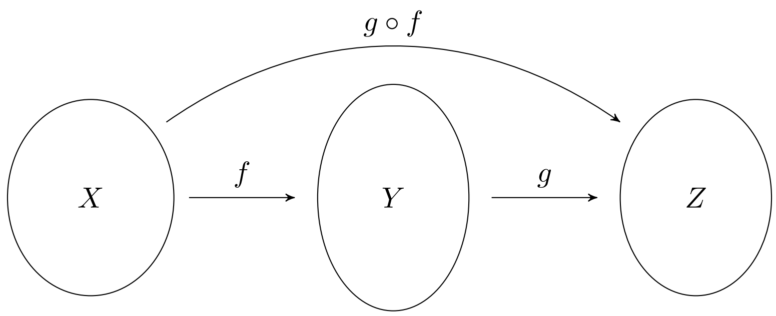
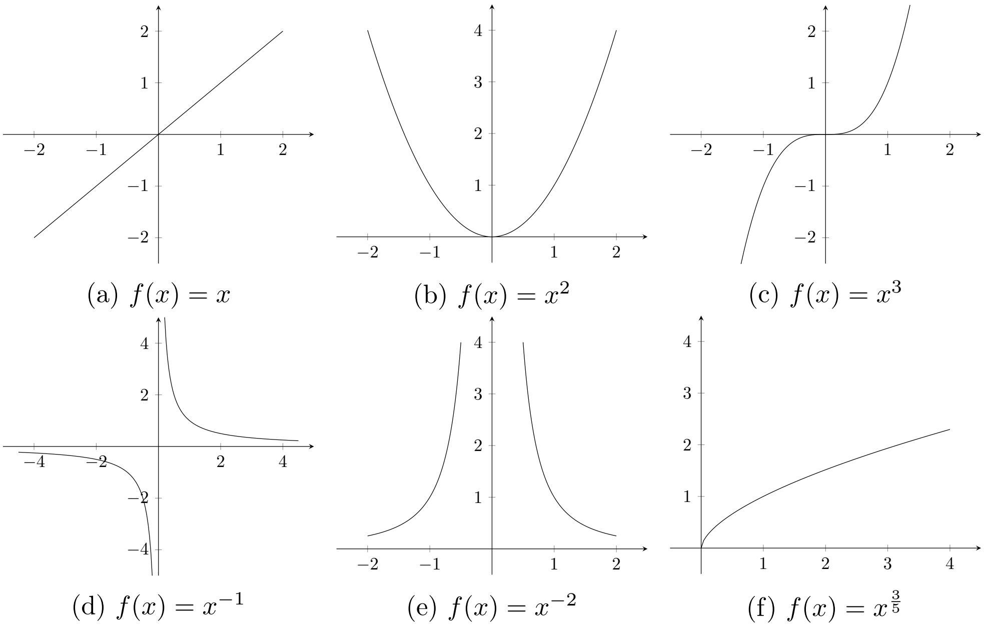


Abbildung 2.3: Schematische Darstellung der Verknüpfung (oder auch *Komposition* zweier Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$.

Beispiel 24. Seien X die Menge der Schüler und Schülerinnen einer Schulklasse, Y die Menge der möglichen Punktzahlen in einer Mathematikprüfung, und Z die Menge der möglichen Zensuren. Nachdem der Korrektur gibt es eine Abbildung $f : X \to Y$, welche jeder Schülerin und jedem Schüler seine Punktzahl zuordnet. Außerdem hat die Lehrerin vermutlich vor der Prüfung eine Abbildung $g : Y \to Z$ bekanntgegeben, welche angibt, wie die Punktzahlen in Zensuren umgerechnet werden. Eine Schülerin kann dann ihre Zensur bestimmen, indem sie die Verknüpfung dieser beiden Abbildungen bildet, und bei sich selbst auswertet.

2.3 Elementare Funktionen

In diesem Abschnitt behandeln wir einige Klassen von Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die aus der Schule schon bekannt sein sollten. Es werden jeweils einige interessante Eigenschaften der maximal mögliche Definitionsbereich D sowie der Bildbereich $f(D)$ angegeben. Wir werden jeweils auch den Graphen der Funktionen skizzieren.



(a) $f(x) = x$ (b) $f(x) = x^2$ (c) $f(x) = x^3$

(d) $f(x) = x^{-1}$ (e) $f(x) = x^{-2}$ (f) $f(x) = x^{\frac{3}{5}}$

Abbildung 2.4: Funktionsgraphen einiger Potenzfunktionen mit verschiedenen Exponenten

Potenzfunktionen

Definition. Funktionen mit den Abbildungsvorschrift

$$f(x) = x^q$$

wobei q eine rationale Zahl ist heißen *Potenzfunktionen.*

Definitionsbereich und Bildbereich hängen davon ab, ob der Exponent q ganzzahlig ist oder nicht und ob er positiv oder negativ ist. Wir werden nun auf die verschiedenen Fälle im Detail eingehen.

Für $q = 0$ definiert man $x^0 = 1$, das heißt, die Potenzfunktion ist die Funktion, die überall den Wert 1 hat (konstante Funktion, $D = \mathbb{R}, f(D) = \{1\}$).

Der nächste Fall ist, wenn q eine natürliche Zahl ist. In diesem Fall ist die Funktion $f(x) = x^q$ für jede reelle Zahl x definiert. Falls q ungerade ist, so ist der Bildbereich ganz $\mathbb{R}$ und die Funktion ist sogar bijektiv. Für gerades q ist der Bildbereich $f(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, \infty)$.

Beispiele 25. Abbildungen 2.4a, 2.4b und 2.4c zeigen Potenzfunktionen, die in diese Kategorie fallen.

Lassen wir für q auch negative Zahlen zu, so erhalten wir Funktionen der Form $x^{-1} = \frac{1}{x}, x^{-2} = \frac{1}{x^2}, x^{-3} = \frac{1}{x^3}, \ldots$ Da wir durch jede reelle Zahl mit Ausnahme der 0 dividieren können, sind diese Funktionen für beliebige x mit Ausnahme der 0 definiert, also $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ihr Bildbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, falls q ungerade ist und $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = (0, \infty)$, falls q gerade ist.

Beispiele 26. Abbildungen 2.4d und 2.4e zeigen Funktionen, die in diese Klasse fallen.

Lassen wir für q beliebige Brüche zu, so kommen Wurzeln ins Spiel: $x^{\frac{m}{n}}$ ist definiert als $(\sqrt[n]{x})^m$, also zum Beispiel $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ bzw. $x^{\frac{-3}{4}} = \frac{1}{(\sqrt[4]{x})^3}$. Üblicherweise kürzt man den Bruch im Exponenten soweit wie möglich, d.h. man verwendet gekürzte Brüche.

Der Definitionsbereich von Funktionen dieser Bauart hängt vom Definitionsbereich der Wurzel ab. Gerade Wurzeln sind nur für Zahlen ≥ 0 definiert, ungerade Wurzeln überall. Außerdem muss man für negatives q wieder die 0 aus dem Definitionsbereich ausschließen.

Beispiel 27. Abbildung 2.4f zeigt den Graphen einer Funktion dieses allgemeinen Typs.

Polynome

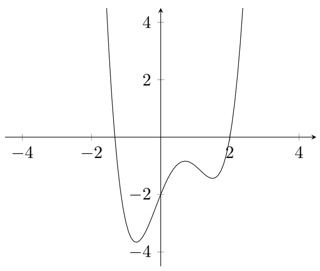
Definition. Funktionen der Form

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

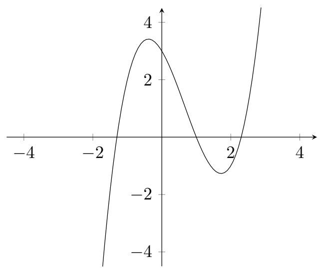
wobei $a_n \neq 0$ heißen Polynome n-ten Grades. a_n heißt Leitkoeffizient des Polynoms.

Da Polynome aus Potenzfunktionen mit Exponenten aus $\mathbb{N}_0$ zusammengesetzt sind, ist ihr Definitionsbereich ganz $\mathbb{R}$. Polynome vom Grad 0 sind die konstanten Funktionen, Polynome vom Grad 1 heißen lineare Funktionen (ihre Funktionsgraphen sind Geraden), Polynome vom Grad 2 bezeichnet man als quadratische Funktionen.

Beispiele 28. Abbildung 2.5 zeigt 2 Graphen von Polynomfunktionen.



(a) $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x - 2$



(b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 3$

Abbildung 2.5: Graphen von Polynomen

Bemerkung 29. Ist der Index n des Leitkoeffizienten eines Polynoms

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ungerade, so ist das Bild $f(\mathbb{R})$ stets ganz $\mathbb{R}$. Für gerades n ist die Sache etwas komplizierter: je nach Vorzeichen von a_n ist das Bild dann ein Intervall der Form $(-\infty, b]$ oder $[a, \infty)$. Dies können Sie nach dem ersten Semester Analysis problemlos beweisen.

Rationale Funktionen

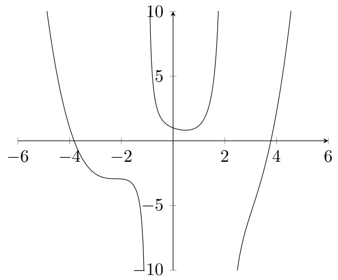
Rationale Funktionen lassen sich auf dieselbe Weise aus den Polynomen gewinnen, wie rationale Zahlen aus den ganzen Zahlen gewonnen werden.

Definition. Als *rationale Funktionen* bezeichnen wir Funktionen der Form

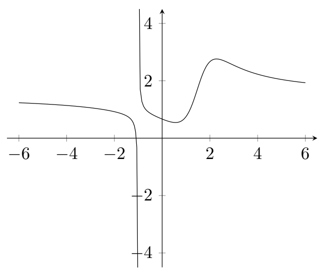
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

wobei p und q Polynome sind und q nicht die konstante Nullfunktion ist.

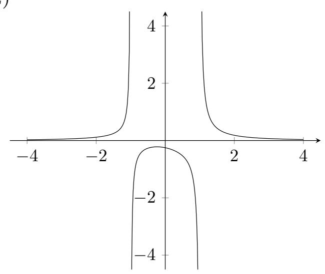
Beispiele 30. Abbildung 2.6 zeigt 3 Graphen von rationalen Funktionen.



(a) $f(x) = \frac{x^6-14x^4-4x^2+10x-40}{20(x^2-x-2)}$



(b) $g(x) = \frac{3x^3-2x^2-2x+4}{2x^3-4x^2+6}$



(c) $h(x) = \frac{2x^2+x+1}{4x^4-4}$

Abbildung 2.6: Graphen rationaler Funktionen

Der maximale Definitionsbereich einer solchen rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ist die Menge

$$\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}$$

derjenigen reellen Zahlen, in denen der Nenner von Null verschieden ist. Da Polynome nur endliche viele Nullstellen haben, ist die Ausnahmemenge für jede rationale Funktion endlich. Für die in Abbildung 2.6 gezeigten Funktionen sind die Definitionsbereiche

$$\begin{aligned} D(f) &= \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}, \\ D(g) &= \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \\ D(h) &= \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}. \end{aligned}$$

Bemerkung 31. Das Verhalten einer rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ im Unendlichen hängt von den Graden der Polynome p und q ab. Können Sie eine allgemeine Regel formulieren?

Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen sehen zwar ähnlich aus wie Potenzfunktionen, im Gegensatz zu diesen steht die Variable x aber nun im Exponenten.

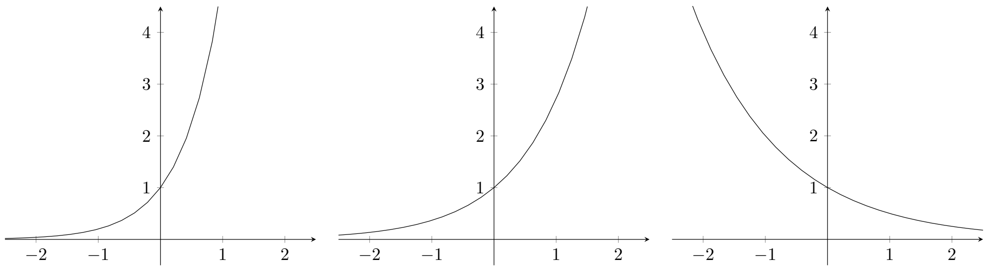
Definition. Als *Exponentialfunktionen* bezeichnen wir Funktionen der Form

$$f(x) = a^x$$

wobei $a > 0$ eine reelle Zahl ist.

Der Definitionsbereich dieser Funktionen ist ganz $\mathbb{R}$. Dass sie für rationales x definiert sind, haben wir gerade eben gesehen. Die Definition für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ kann Beispielsweise mithilfe von Grenzwerten erfolgen, einem Konzept, das wir später in diesem Kurs noch kennenlernen werden. Der Bildbereich ist die Menge aller positiven reellen Zahlen.

Das Monotonieverhalten von Exponentialfunktionen mit Parameter $a < 1$ und $a > 1$ ist sehr unterschiedlich, wie Abbildung 2.7 zeigt. Der Grenzfall $a = 1$ gibt die konstante Funktion $f(x) = 1$ und ist daher nur mäßig interessant .



(a) $f(x) = 5^x$ (b) $f(x) = \exp x$ (c) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

Abbildung 2.7: Graphen von Exponentialfunktionen

Satz 32 (Rechenregeln für Potenzen)**.** *Es gilt:*

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,
2. $a^{cx} = (a^c)^x$.

Definition. Die Exponentialfunktion $\exp(x) = e^x$ mit Basis $e = 2.71828182\ldots$ heißt *natürliche Exponentialfunktion.*

Der Grund, aus dem man Exponentialfunktionen gerne zur Basis e darstellt ist, dass die Funktion $f(x) = e^x$ gleich ihrer eigenen Ableitung ist (mehr dazu später). Satz 32 sagt auch, dass wir jede Exponentialfunktion auf eine natürliche Exponentialfunktion zurückführen können indem wir ein b finden, sodass $a = e^b$. Dann ist nämlich $a^x = (e^b)^x = e^{bx} = \exp(bx)$.

Logarithmusfunktion

Die Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ sind für $a \neq 1$ bijektiv als Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $(0, \infty)$. Dies erlaubt es uns, ihre Umkehrfunktionen zu betrachten.

Definition. Zu vorgegebenen Zahlen $a > 0$, $a \neq 1$, und $u > 0$ ist der Logarithmus $\log_a(u)$ von u zur Basis a die eindeutig bestimmte Zahl s, so dass die Gleichung $a^s = u$ gilt.

Beispiele 33.

- $\log_3(9) = 2$, weil $3^2 = 9$.
- $\log_4(2) = \frac{1}{2}$, weil $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$.
- $\log_{10}(10000) = 4$.
- $\log_2(64) = 6$.

Aus der Definition des Logarithmus sieht man sofort, dass $\log_a(a^s) = s$ und dass $a^{\log_a(u)} = u$ sein muss. Der Logarithmus zur Basis 10 wird manchmal mit $\log_{10}(u) = \lg(u)$ bezeichnet, der Logarithmus zur Basis e der natürlichen Exponentialfunktion mit $\log_e(u) = \ln(u)$. Wenn die Basis a aus dem Zusammenhang klar ist, dann lässt man sie auch manchmal weg und schreibt nur $\log(u)$ anstatt $\log_a(u)$.

Satz 32 über Rechenregeln für Potenzen hat direkte Implikationen für das Rechnen mit Logarithmen.

Satz 34 (Rechenregeln für Logarithmen)**.** *Es gilt*

1. $\log_a(uv) = \log_a(u) + \log_a(v)$ *und* $\log_a(\frac{u}{v}) = \log_a(u) - \log_a(v)$.
2. $\log_a(u^t) = t \log_a(u)$ *und* $\log_a(\sqrt[t]{u}) = \frac{1}{t} \log_a(u)$

Außerdem kann man Logarithmen zu einer bestimmten Basis relativ leicht in eine andere Basis umrechnen:

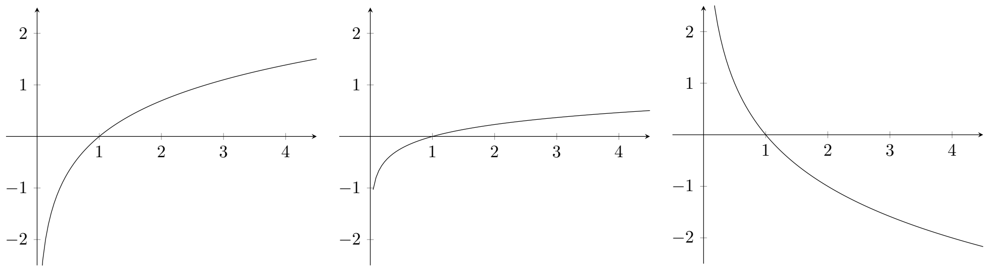
$$\log_a(u) = \log_a(b^{\log_b(u)}) = \log_b(u) \log_a(b).$$

Somit ist $\log_b(u) = \frac{\log_a(u)}{\log_a(b)}$. Diese Regel kann man beispielsweise benutzen um beliebige Logarithmen zu berechnen, wenn der Taschenrechner nur den natürlichen Logarithmus berechnen kann: $\log_a(u) = \frac{\ln(u)}{\ln(a)}$.

Da der Logarithmus zur Basis a für alle positiven Zahlen definiert ist, können wir eine Funktion mit Definitionsbereich $(0, \infty)$ definieren, die jeder Zahl x den Logarithmus $\log_a(x)$ zuordnet.

Definition. Funktionen $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ der Form $g(x) = \log_a(x)$ heißen *Logarithmusfunktionen.*

Dies sind natürlich gerade die Umkehrfunktionen der jeweiligen Exponentialfunktion $f(x) = a^x$. In Abbildung 2.8 sind die Graphen einiger Logarithmusfunktionen dargestellt.



(a) $f(x) = \ln x$ (b) $f(x) = \log_{20} x$ (c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$

Abbildung 2.8: Graphen von Logarithmusfunktionen

Trigonometrische Funktionen

Als trigonometrische Funktionene oder auch Winkelfunktionen bezeichnet man die aus der Schule schon bekannten Funktionen Sinus, Kosinus, Tangens, etc. Wir geben hier nur einige der elementarsten Eigenschaften dieser Funktionen an.

Definition. Sei $x \in \mathbb{R}$ und sei (u, v) der Punkt am Einheitskreis, der mit der positiven u-Achse einen Winkel von x einschließt (Bogenmaß, gegen den Uhrzeigersinn gerechnet). Dann definieren wir den *Kosinus von* x durch $\cos x = u$ und den *Sinus von* x durch $\sin x = v$ (siehe Abbildung 2.9).

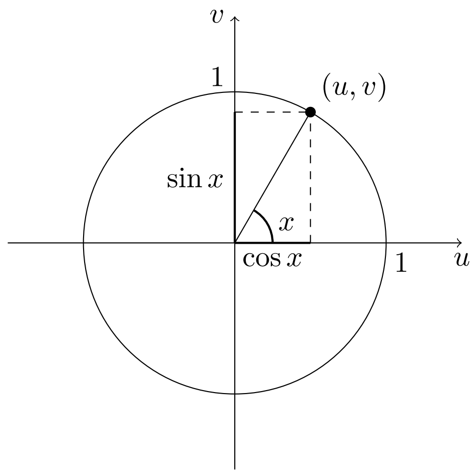


Abbildung 2.9: Definition von Sinus und Kosinus

Aus der Definition sieht man sofort, dass $\sin x$ und $\cos x$ die Längen der beiden Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks sind, dessen Hypotenuse Länge 1 besitzt. Somit folgt mittels des Satzes von Pythagoras, dass

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1.$$

Man schreibt dafür auch $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Sinus und Kosinus haben gleichartigen Verlauf. Die beiden Graphen sind zueinander um das Bogenmaß $\frac{\pi}{2}$ verschoben, was einem Viertelkreis entspricht. In Abbildung 2.10 ist dies gut zu sehen. Beide Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und nehmen Werte in $[-1, 1]$ an.

Außerdem sind die beiden Funktionen periodisch mit Periode 2π, also

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

Das sieht man leicht daran, dass der Winkel 2π einem vollen Kreis entspricht, danach wiederholt sich die Bahn des Punktes (u, v).

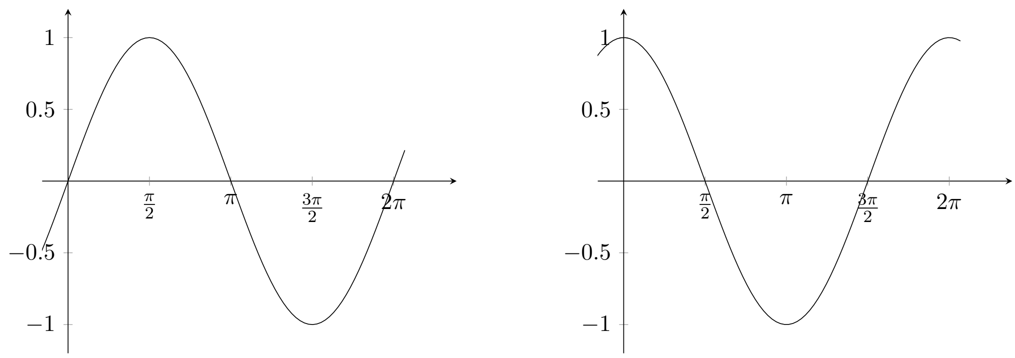
Definition. Die Funktionen *Tangens* beziehungsweise *Kotangens* sind definiert durch die Gleichungen

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{beziehungsweise} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Tangens und Kotangens sind überall definiert wo der jeweilige Nenner nicht gleich Null ist. Im Fall des Tangens ist das $\mathbb{R} \setminus \{x \mid \exists n \in \mathbb{N} : x = (\frac{1}{2} + n)\pi\}$, im Fall des Kotangens $\mathbb{R} \setminus \{x \mid \exists n \in \mathbb{N} : x = n\pi\}$. Der Bildbereich von Tangens und Cotangens ist jeweils ganz $\mathbb{R}$. Beide Funktionen sind periodisch mit Periode π.

Die folgende Tabelle enthält einige Werte für die in diesem Abschnitt definierten Winkelfunktionen, „n.d.“ bedeutet, dass die Funktion an der entsprechenden Stelle nicht definiert ist.

Winkel	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Winkel in Grad	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.	0	n.d.	0
$\cot x$	n.d.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	n.d.	0	n.d.



(a) $f(x) = \sin x$ (b) $f(x) = \cos x$

Abbildung 2.10: Die Graphen der Sinus– und Kosinusfunktion

Zusammengesetzte Funktionen

Viele Funktionen, die in praktischen Anwendungen eine Rolle spielen, entsprechen zwar nicht genau den elementaren Funktionen die bisher behandelt wurden, können aber relativ einfach aus ihnen zusammengesetzt werden. Beispielsweise kann man Funktionen addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren, indem man die entsprechende Operation auf die Funktionswerte in jedem Punkt x anwendet.

Man nennt diese Operation punktweise Addition, Subtraktion, Multiplikation bzw. Division. Sie ist überall definiert, wo beide Funktionen definiert sind. Ausnahme ist die Division, hier muss auch noch sichergestellt werden, dass der Wert des Nenners im jeweiligen Punkt nicht 0 ist.

Definition. Seien f und g zwei Funktionen mit Definitionsbereichen D_f und D_g. Dann kann man folgende Funktionen definieren:

$$\begin{aligned}
(f+g)&: & D_f \cap D_g &\to \mathbb{R} & x &\mapsto f(x)+g(x)\\
(f-g)&: & D_f \cap D_g &\to \mathbb{R} & x &\mapsto f(x)-g(x)\\
(f\cdot g)&: & D_f \cap D_g &\to \mathbb{R} & x &\mapsto f(x)\cdot g(x)\\
\left(\frac{f}{g}\right)&: & \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\} &\to \mathbb{R} & x &\mapsto \frac{f(x)}{g(x)}
\end{aligned}$$

Beispiele 35.

- $f(x) = 1+3x^2$, $g(x) = 2x - x^2$, dann ist $f+g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $(f+g)(x) = 1+2x+2x^2$
- $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{3x}$, dann ist $f \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $(f \cdot g)(x) = e^x \cdot e^{3x} = e^{4x}$
- $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, dann ist $\frac{f}{g}$ gegeben durch $x \mapsto \tan x$ (mit dem entsprechenden Definitionsbereich).

Neben punktweiser Kombination von Funktionen kann man auch neue Funktionen erhalten, indem man den Funktionswert einer Funktion als Argument einer anderen benutzt. Diese Verknüpfung (oder auch Komposition) hatten wir im allgemeinen Teil zu Abbildungen bereits beschrieben.

Wir betrachten abschließend noch einige Beispiele für Verknüpfungen von Funktionen. Der Definitionsbereich einer solchen Verknüpfung $g \circ f$ von Funktionen $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \to \mathbb{R}$ besteht aus allen x aus dem Definitionsbereich von f, so dass $f(x)$ im Definitionsbereich von g liegt - in Symbolen

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}.$$

Beispiele 36.

- Sei $f(x) = 1+x$ und $g(x) = 1-x+x^2$, dann ist $(g \circ f)(x) = 1 - f(x) + f(x)^2 = 1-(1+x)+(1+x)^2$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$.
- Falls $g(x) = f(x) = \frac{1}{x}$ ist, dann ist $(g \circ f)(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Falls $f(x) = x^3$ und $g(x) = \sqrt[3]{x}$, so ist $g \circ f(x) = \sqrt[3]{x^3} = x$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

- Die letzten beiden Beispiele lassen sich allgemein formulieren: Ist $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung so ist $f^{-1} \circ f$ die Abbildung von X nach X, welche jedes $x \in X$ auf sich selbst abbildet. Analog ist $f \circ f^{-1}$ die Abbildung von Y nach Y, welches jedes $y \in Y$ auf sich selbst abbildet. Als weiteres konkretes Beispiel für zueinander inverse Funktionen hatten wir ja bereits Logarithmen und Exponentialfunktionen betrachtet.

3 Was ist eigentlich ein Grenzwert?

Grenzwerte sind ein zentrales Konzept der Analysis, welches Ihnen im ersten Semester begegnen wird und von da an immer wieder in diversen Kontexten auftritt. Zur Motivation beginnen wir mit einigen Fragen:

- In welchem Sinne gilt die Gleichung $1 = 0.999\ldots$ (unendlicher Dezimalbruch)?
- Wie kann man den Umfang oder den Flächeninhalt eines Kreises näherungsweise bestimmen?
- (Zenos Paradox) Achilles und eine Schildkröte sollen um die Wette laufen. Achilles ist zehnmal so schnell wie die Schildkröte, darum erhält die Schildkröte 10 Meter Vorsprung. Nun erklärt der Philosoph Zeno, dass Achilles das Wettrennen gar nicht gewinnen kann: Wenn er an dem Ort ankommt, an dem die Schildkröte gestartet ist, dann ist sie ja schon ein Stück weiter, und kommt er an diesem nächsten Punkt an, dann ist sie schon wieder etwas weiter, und so fort... Hat Zeno recht?

Wie wir sehen werden, haben alle diese Fragen mit Grenzwerten zu tun. Was ist nun aber ein Grenzwert?!? Betrachten wir dazu als Beispiel die Frage nach dem Umfang eines Kreises vom Radius 1. Erste Näherungslösungen erhalten wir, indem wir statt des eigentlichen Kreises regelmäßige Polygone betrachten, so dass entweder die Ecken oder die Kantenmittelpunkte auf dem Kreis liegen. Im folgenden Bild sehen wir einige Beispiele für solche Polygone.

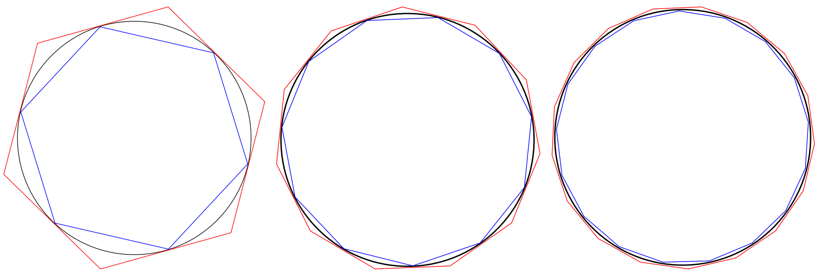


Abbildung 3.1: Approximationen einer Kreislinie durch Polygone mit 6, 11 und 17 Ecken, jeweils von innen (blau) und von außen (rot).

Die Bilder suggerieren mehrere Dinge. Zunächst einmal ist klar, dass die blauen Polygone einen kleineren Umfang haben als die roten, denn um von einem blauen zu einem roten Polygon zu kommen, ersetzen wir jeweils jede Kante durch die beiden anderen Seiten eines Dreiecks mit dieser Basis. Auch scheint die Länge der Kreislinie zwischen den

Längen der blauen und der roten Polygone zu liegen. Um also erste Abschätzungen für die Länge der Kreislinie zu erhalten, betrachten wir der Einfachheit halber einmal die Approximation durch Sechsecke. Da unsere Polygone regelmäßig gewählt waren, ist der

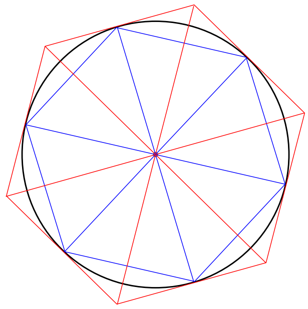


Abbildung 3.2: Die inneren Dreiecke sind gleichseitig und haben als Kantenlänge gerade den Radius des Kreises. Außerdem entspricht diese Kantenlänge gerade der Höhe der äußeren Dreiecke.

Scheitelwinkel der Dreiecke im Zentrum gerade $\frac{360°}{6} = 60°$, so dass es sich um gleichseitige Dreiecke handelt. Die inneren, blauen Dreiecke haben als Kantenlänge gerade den Radius unseres Kreises, den wir als $r = 1$ angenommen hatten, und wir erhalten für den Umfang des blauen Sechsecks $6 \cdot 1 = 6$. Für die äußeren, roten Dreiecke bilden die blauen Kanten gerade die Höhe, so dass man mit einer kurzen Rechnung als Kantenlänge der roten Dreiecke $\frac{2}{\sqrt{3}}$ erhält. Insgesamt erhalten wir für die Länge ℓ unserer Kreislinie die Abschätzungen

$$6 < \ell < 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 6.9282.$$

Betrachten wir nun noch einmal die Abbildung 3.1, so bemerken wir auch, dass *„sich die Polygone der Kreislinie immer mehr annähern, wenn man die Anzahl der Ecken erhöht“*. Diese Aussage zu präzisieren ist nicht ganz einfach, denn es genügt für die folgende Argumentation nicht, festzustellen, dass die Polygone als Punktmengen immer näher an der Kreislinie liegen. In der Tat ist es nicht völlig trivial, die Länge der Kreislinie überhaupt zu definieren. Nehmen wir aber einmal an, dass es eine sinnvolle Definition für diese Länge ℓ gibt, und dass für jedes n der Umfang u_n des inneren n-Ecks und der Umfang U_n des äußeren n-Ecks die Ungleichungen

$$u_n < \ell < U_n$$

erfüllen. Man kann nachrechnen, dass die u_n eine aufsteigende Folge bilden, d.h. es gilt

$$u_3 < u_4 < u_5 < u_6 < \dots$$

Analog bilden die U_n eine absteigende Folge, d.h. es gilt

$$U_3 > U_4 > U_5 > U_6 > \dots$$

Anders ausgedrückt erhalten wir eine Folge von Intervallen

$$[u_3, U_3] \supset [u_4, U_4] \supset [u_5, U_5] \supset [u_6, U_6] \supset \cdots \supset [u_n, U_n] \supset [u_{n+1}, U_{n+1}] \supset \dots,$$

welche ineinander geschachtelt sind. In diesem konkreten Beispiel besteht der Durchschnitt dieser unendlich vielen Intervalle aus genau einer reellen Zahl x_0, und da die Länge ℓ unseres Kreisbogens offenbar in jedem der Intervalle und somit auch in diesem Durchschnitt enthalten ist, muss sie mit der reellen Zahl x_0 übereinstimmen. Dies ist der *Grenzwert* der Umfänge sowohl der einbeschriebenen als auch der umbeschriebenen n-Ecke *„wenn man n gegen Unendlich gehen lässt“*. In der Tat wissen Sie aus der Schule vermutlich bereits die Antwort: es gilt $\ell = x_0 = 2\pi$.

3.1 Folgen

Um nun das Wesentliche aus dem obigen Beispiel zu extrahieren, formalisieren wir noch einmal einen bereits benutzten Begriff.

Definition. Eine *Folge reeller Zahlen* ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$. Wir schreiben solche Folgen in der Form $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder manchmal auch nur (x_n), womit gemeint ist, dass n auf x_n abbildet. Die Einträge x_n heißen Glieder der Folge.

Häufig schreibt man Folgen auch als $(x_1, x_2, x_3, \dots)$, wobei diese Schreibweise nur dann Sinn macht, wenn klar ist, wie die Folge fortgesetzt werden muss. Zum Beispiel enthält die Folge $(1, 2, 3, 4, \dots)$ alle natürlichen Zahlen in der Reihenfolge, die durch die Ordnung $<$ gegeben ist. Bei der Folge $(8, 8, 15, 2, 1, 37, \dots)$ sind die Punkte aber eher fehl am Platz, da nicht sehr klar ist, wie es weitergehen soll. Hier müsste schon genauer gesagt werden, wie die übrigen Folgenglieder aussehen.

In der Praxis ist es häufig nicht von Bedeutung, dass wir es mit Abbildungen zu tun haben. Wichtiger ist, dass die Elemente einer Folge eine bestimmte Reihenfolge haben, also x_1 vor x_2 vor x_3 etc. Insofern kann man eine Folge auch als unendliche Aufzählung von reellen Zahlen auffassen, deren Reihenfolge eine Rolle spielt. Im Gegensatz dazu ist eine Menge eine (möglicherweise unendliche) Aufzählung von Elementen, deren Reihenfolge keine Rolle spielt. So sind beispielsweise die Mengen $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ und $\{3, 1, 2, 4, 5, 6, 7, \dots\}$ gleich, die Folgen $(1, 2, 3, 4, \dots)$ und $(3, 1, 2, 4, 5, 6, 7, \dots)$ aber nicht.

Beispiele 37.

- Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 2, 3, \dots)$ ist die Folge der natürlichen Zahlen, die wir schon zuvor als Beispiel verwendet haben.
- $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ definiert die Folge $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$.
- $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert die (periodische) Folge $(-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$. Periodisch bedeutet in diesem Fall, dass sich die Folge immer wieder widerholt.
- Manchmal sind die Folgenglieder nicht mit 1 beginnend nummeriert, sondern beginnend mit einer anderen natürlichen Zahl.[1] So bilden auch die Umfänge $(u_n)_{n\geq 3}$ und

[1] Dies ist kein großes Problem, schließlich könnte man, falls unbedingt nötig, die Folgenglieder umnummerieren, ohne die Reihenfolge zu ändern, so dass die Nummerierung doch wieder mit 1 beginnt.

$(U_n)_{n\geq 3}$ der einbeschriebenen bzw. umbeschriebenen n-Ecke unseres Kreisbeispiels Folgen reeller Zahlen.

- Manchmal definiert man die einzelnen Einträge einer Folge nicht explizit, sondern gibt eine Vorschrift an, wie ein Eintrag aus dem vorigen gewonnen werden kann. Das bezeichnet man als rekursiv definierte Folge: Die Folge, die durch die Vorschrift

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1 \quad \text{und} \quad x_n = x_{n-2} + x_{n-1}$$

  definiert ist heißt *Fibonacci-Folge*. Ihre ersten Glieder sehen folgendermaßen aus:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$$

- Manche Folgen kann man leicht sowohl explizit als auch rekursiv definieren. So liefern zum Beispiel die Beschreibungen $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $x_1 = 2$ und $x_{n+1} = 2 \cdot x_n$ für $n \geq 1$ äquivalente Beschreibungen derselben Folge, nämlich $(2, 4, 8, 16, 32, \dots)$.

Da wir Folgen als Abbildungen von (Teilmengen von) $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ betrachten können, können wir sie addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren (sofern der Nenner nicht 0 ist). Außerdem können wir für eine Folge (x_n) und eine Funktion f, so dass jedes Folgenglied im Definitionsbereich der Funktion liegt, durch $(f(x_n)) = (f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots)$ eine neue Folge definieren.

Beispiele 38.

- Sei $(x_n) = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $f(x) = \frac{1}{x}$, dann ist $(f(x_n)) = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$.
- Wenn $x_n = \pi n$ ist und $f = \sin(x)$, dann ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} = (\sin(\pi n))_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}$ die konstante Null-Folge, da der Sinus von beliebigen ganzzahligen Vielfachen von π immer 0 ist.

3.2 Konvergenz

Bei der Untersuchung von Folgen geht es oft darum, gewisse Muster zu erkennen und zu verstehen. Wie wir ja schon bemerkt haben, ist zum Beispiel die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ periodisch mit Periode 2. Andere Folgen, wie zum Beispiel $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ oder unsere Folgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *„kommen einer gewissen reellen Zahl immer näher"*. Formal ist der Begriff der Konvergenz folgendermaßen definiert:

Definition. Eine Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent mit Grenzwert a* wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine natürlich Zahl n_0 gibt, so dass für jedes $n \geq n_0$ gilt, dass

$$|x_n - a| < \epsilon.$$

Wir sagen in diesem Fall auch „x_n konvergiert gegen a" oder „x_n geht gegen a" und schreiben

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{beziehungsweise kurz} \quad x_n \to a.$$

Mit Hilfe von Quantoren kann man die obige Definition auch schreiben als

$$\forall \epsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 \colon |x_n - a| < \epsilon.$$

Diese Definition ist hinreichend kompliziert, dass man sie sich einmal in Ruhe ansehen sollte. Es wird verlangt, dass für jede reelle Zahl $\epsilon > 0$ ab einem gewissen Index n_0 der Abstand der Folgenglieder x_n zu unseren Grenzwert a kleiner sein muss als der vorgegebene Wert ϵ. Hat man für ein gewisses $\epsilon_0 > 0$ einmal ein geeignetes $n_0 \in \mathbb{N}$ gefunden, so dass die Bedingung erfüllt ist, so gilt sie offenbar auch für alle größeren $\epsilon > \epsilon_0$. Um also Konvergenz zu überprüfen, genügt es dann, für alle $0 < \epsilon < \epsilon_0$ die Bedingung nachzuweisen.

Bemerkung 39. Das folgende sprachliche Bild kann hilfreich sein: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn wir zu jeder fest vorgegebenen „Messgenauigkeit“ $\epsilon > 0$ einen Index $n \in \mathbb{N}$ finden, so dass man mit dieser Messgenauigkeit alle späteren Folgenglieder nicht mehr von a unterscheiden kann.

Wie bei allen $\forall$-Aussagen genügt es, ein einziges $\epsilon > 0$ anzugeben, für das die Bedingung nicht erfüllbar ist, um Konvergenz auszuschließen. Eine manchmal etwas unbequeme Eigenschaft unserer Definition ist es übrigens, dass man einen Kandidaten für den Grenzwert braucht, um Konvergenz zu beweisen oder zu widerlegen. In der Analysis werden Sie alternative Kriterien kennenlernen, die Ihnen Konvergenzbeweise ermöglichen, ohne den Grenzwert bereis zu kennen.

Beispiele 40.

- Die Folge $(\frac{1}{n})$ konvergiert gegen 0: für jedes $\epsilon > 0$ können wir eine natürliche Zahl $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$ finden.[2] Für $n \geq n_0 > \frac{1}{\epsilon}$ gilt dann $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$ und somit

$$|x_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

- Die Folge $((-1)^n)$ konvergiert nicht. Dies beweisen wir indirekt, nehmen also an, es gäbe einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Nun wählen wir

$$\epsilon_0 = \max(|a-1|, |a+1|)$$

als größeren der beiden Abstände von a zu 1 bzw. von a zu -1. Man kann sich überlegen, dass dieses ϵ_0 mindestens 1 sein muss, egal welches $a \in \mathbb{R}$ wir als Grenzwert annehmen, so dass insbesondere $\epsilon_0 > 0$. Nun müsste es ein n_0 geben, so dass für $n > n_0$ gilt, dass $|x_n - a| < \epsilon_0$. Da die Folgenglieder x_n aber abwechselnd die Werte 1 und -1 annehmen, müsste also gelten, dass $|1-a| < \epsilon_0$ und $|-1-a| = |a+1| < \epsilon_0$. Dies widerspricht unserer Wahl von ϵ_0.

- Für $q \in (0, \infty)$ definieren wir die *geometrische Folge* durch $x_n = q^n$. Das Konvergenzverhalten dieser Folge hängt vom Wert von q ab.
  - Ist $q > 1$, dann konvergiert die Folge nicht: Jedes $q > 1$ lässt sich als $q = 1 + r$ mit $r > 0$ schreiben. Wir haben dann

$$q^n = (r+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k 1^{n-k} = 1 + nr + \cdots \geq 1 + nr,$$

[2] Dies ist eine Eigenschaft der reellen Zahlen.

da die weggelassenen Summanden positiv sind. Ist $M > 0$ gegeben, so wählen wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{M-1}{r}$ und stellen fest, dass dann für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung

$$1 + nr > 1 + n_0 r > M \tag{3.1}$$

gilt. Wir haben also gezeigt: für jede reelle Zahl $M > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ die Ungleichung

$$q^n \geq 1 + nr > M.$$

gilt Diese Tatsache schließt Konvergenz gegen irgendein $a \in \mathbb{R}$ aus (warum?).[3]

– Ist $q = 1$, dann ist jedes q^n ebenfalls gleich 1. Die Folge konvergiert somit gegen 1.

– Falls $q < 1$, so konvergiert die Folge gegen 0. Wir führen dies auf das Argument im ersten Fall zurück, und betrachten dafür $p = \frac{1}{q} > 1$. Ist nun $\epsilon > 0$ gegeben, so definieren wir $M := \frac{1}{\epsilon}$. Zu diesem M finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$p^n > M$$

gilt, welche aber äquivalent zu

$$|q^n - 0| = q^n = \frac{1}{p^n} < \frac{1}{M} = \epsilon$$

ist. Dies beweist die behauptete Konvergenz.

In der Analysis werden Folgen und deren Grenzwerte sehr viel detaillierter behandelt. Einen der vielen Gründe dafür werden wir in den nächsten Kapiteln sehen, wo wir Grenzwerte benutzen werden, um Eigenschaften von Funktionen herauszuarbeiten. Zuerst formulieren wir aber noch einige Rechenregeln für Grenzwerte, die nicht schwer zu beweisen sind.

Satz 41. *Seien (x_n) und (y_n) konvergente Folgen mit den Grenzwerten a und b. Dann gilt:*

(a) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$.

(b) $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$.

(c) $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

(d) $\lim_{n\to\infty}(\frac{x_n}{y_n}) = \frac{a}{b}$, *falls* $b \neq 0$.

Die letzte Aussage des Satzes ist wie folgt zu verstehen: Für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ ist y_n von 0 verschieden, so dass die Quotientenfolge definiert ist, und diese Folge konvergiert gegen den angegebenen Grenzwert.

[3] Die hier formulierte Bedingung „Für alle $M > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ die Ungleichung $x_n > M$ gilt.“ charakterisiert die *bestimmte Divergenz* der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ∞.

3.3 Reihen: Ein Ausblick

Wir wollen nun noch einmal auf die beiden noch nicht beantworteten Fragen vom Anfang des Kapitels zurückkommen. Um die Frage

In welchem Sinne gilt die Gleichung $1 = 0.999\ldots$ *(unendlicher Dezimalbruch)?*

zu beantworten, müssen wir uns zunächst überlegen, wofür so ein *unendlicher* Dezimalbruch genau steht. Dies tun wir in Analogie zu *endlichen* Dezimalbrüchen. Es gilt bekanntlich

$$0.z_1z_2\ldots z_n = z_1 \cdot \frac{1}{10} + z_2 \cdot \frac{1}{100} + \cdots + z_n \cdot \frac{1}{10^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i}{10^i},$$

wenn $z_1, \ldots z_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ die Ziffern unserer Dezimalzahl sind. Haben wir nun einen unendlichen Dezimalbruch vor uns, so entspricht dieser offenbar einer unendlichen Summe (auch *Reihe* genannt)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{10^k}.$$

Man kann unendlichen Summen nicht immer auf sinnvolle Weise einen Wert zuweisen. Im vorliegenden Fall können wir jedoch beschließen, den unendlichen Dezimalbruch „zu runden", indem wir nach irgendeiner Anzahl n von Ziffern abbrechen. Formal erhalten wir also aus einem unendlichen Dezimalbruch

$$x = 0.z_1z_2z_3\ldots$$

eine Folge von (rationalen) Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n = 0.z_1z_2\ldots z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{10^k}.$$

Diese endlichen Summen nennt man *Partialsummen* der Reihe.

Definition. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *konvergent*, falls der Grenzwert der Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ existiert. Man nennt dann diesen Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ der Partialsummen den *Wert der unendlichen Reihe.*

In unserem konkreten Beispiel

$$x = 0.999\ldots$$

erhalten wir als Partialsummen

$$x_1 = \frac{9}{10}, \quad x_2 = \frac{99}{100}, \quad x_3 = \frac{999}{1000}, \ldots$$

Allgemein gilt

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{9}{10^i} = 9 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{10^i}.$$

Wenn wir den Faktor 9 vorübergehend ignorieren, so erhalten wir eine neue Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{10^i} = 0.\underbrace{11\ldots 1}_{n \text{ Einsen}}.$$

Summen dieser Form sind zum Glück relativ einfach auszurechnen, denn man kann zeigen, dass für jede reelle Zahl $q \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1}.$$

Andererseits hatten wir bereits gesehen, dass die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $0 < q < 1$ gegen 0 konvergiert. Dasselbe gilt dann natürlich auch für die Folge $(q^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ (warum?). Die Folge der *Partialsummen*

$$\sum_{i=1}^{n} q^i$$

der sogenannten *geometrischen Reihe*

$$\sum_{i=1}^{\infty} q^i$$

konvergiert also für $0 < q < 1$ gegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1} - q}{q - 1} = \frac{-q}{q - 1} = \frac{q}{1 - q},$$

d.h. die geometrische Reihe konvergiert:

$$\sum_{i=1}^{\infty} q^i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{q}{1 - q}.$$

In unserem konkreten Fall rechnen wir mit $q = \frac{1}{10}$ und erhalten

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{9}.$$

Da unsere Folgenglieder x_n nun gerade jeweils das Neunfache der Partialsummen der geometrischen Reihe waren, erhalten wir

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 9y_n = 9 \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1.$$

Zusammenfassend können wir also sagen: unsere Gleichung

$$1 = 0.999\ldots$$

gilt, weil wir die rechte Seite als konvergente Reihe interpretieren können (und im Wesentlichen müssen!), deren Grenzwert gerade 1 ist.

Bemerkung 42. Wenn Ihnen dies jetzt zu schnell ging, so können Sie einfach abwarten, bis dieser Stoff noch einmal Thema in der Analysis sein wird. Es lohnt sich aber, dieses einfache Beispiel auch jetzt schon zu durchdenken. Sie werden dann in der Analysis effiziente Methoden kennenlernen, um zu beweisen, dass *jeder* unendliche Dezimalbruch tatsächlich gegen eine reelle Zahl konvergiert.

Schließlich bleibt noch Zenos Paradox. Haben Sie vielleicht selbst eine Idee, wie man damit umgeht? Es gibt verschiedene Möglichkeiten: Sie können Zenos Argumentation im Wesentlichen folgen und mit Reihen argumentieren, um den Denkfehler aufzudecken, oder aber Sie beschreiben die Situation anders (aber äquivalent!), so dass das Paradox (hoffentlich!) gar nicht erst auftritt...