Sprache der Mathematik

Aufgabe 1

Wir betrachten die Aussageformen

$$\begin{aligned} A(n) &= \text{„}n \text{ ist eine Primzahl“},\\ B(n) &= \text{„}n \text{ ist eine gerade Zahl“},\\ C(n) &= \text{„}n > 2\text{“}. \end{aligned}$$

Formulieren Sie die folgenden Aussagen jeweils als gewöhnlichen Satz, und entscheiden Sie, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind:

(a) $A(2) \Longrightarrow C(1)$

(b) $C(1) \Longrightarrow A(2)$

(c) $A(4) \Longrightarrow B(1)$

(d) $\exists\, n \in \mathbb{N} : (A(n) \wedge B(n))$

(e) $B(2) \wedge C(3)$

(f) $B(3) \vee B(5)$

(g) $(C(1) \vee B(42)) \wedge A(3)$

(h) $\forall\, n \in \mathbb{N} : (B(n) \vee \neg B(n))$

(i) $\exists\, n \in \mathbb{N} : (A(n) \wedge B(n) \wedge C(n))$

(j) $\forall\, n \in \mathbb{N} : (A(n) \wedge C(n)) \Longrightarrow \neg B(n)$

Aufgabe 2

In einem sagenumwobenen Zoologiebuch steht geschrieben:

Jede ungebrochselte Kalupe ist dorig und jede foberante Kalupe ist dorig.
Es gibt sowohl dorige als auch undorige Kalupen.

Welche der folgenden Schlüsse können über die beschriebene Fauna gezogen werden?

(a) Es gibt sowohl gebrochselte als auch ungebrochselte Kalupen.

(b) Es gibt gebrochselte Kalupen.

(c) Alle nicht dorigen Kalupen sind unfoberant.

(d) Einige gebrochselte Kalupen sind unfoberant.

(e) Alle gebrochselten Kalupen sind unfoberant.

Aufgabe 3

Seien $x, y \in \mathbb{N}$. Entscheiden Sie für jede der folgenden Äquivalenzen, ob sie wahr oder falsch ist:

(a) xy ungerade $\Longleftrightarrow$ x und y ungerade

(b) xy gerade $\Longleftrightarrow$ x und y gerade

(c) xy ungerade $\Longleftrightarrow$ x oder y gerade

Welche der Bedingungen rechts ist notwendig für die jeweils links stehende Aussage? Welche hinreichend?

Aufgabe 4

Schreiben Sie die folgenden Tautologien als gewöhnlichen Satz, und überzeugen Sie sich, dass es sich in der Tat um Tautologien handelt. Falls Ihnen dies schwer fällt, so geben Sie einen Beweis mittels Wahrheitstafeln.

(a) $(\neg(A \wedge B)) \Longleftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$

(b) $(\neg(A \vee B)) \Longleftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$

(c) $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow ((\neg B) \Longrightarrow (\neg A))$

(d) $((A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow C)) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C)$

Aufgabe 5

Wie schreibt man die Aussage „Entweder A oder B.“ als logische Formel mit den üblichen Verknüpfungen?

Aufgabe 6

Negieren Sie folgende Aussagen:

(a) Die Zahl $\sqrt{x}$ ist rational, falls x eine ganze Zahl ist.

(b) Es gibt rationale Zahlen, die nicht reelle Zahlen sind.

(c) Für alle natürlichen Zahlen n gibt es eine natürliche Zahl m mit $m > n$.

(d) Es gibt eine natürliche Zahl n, so dass es eine natürliche Zahl m mit $m > n$ gibt.

(e) Für alle natürlichen Zahlen n und alle natürlichen Zahlen m gilt $m > n$.

(f) Es gibt eine natürliche Zahl n, so dass für alle natürlichen Zahlen m die Ungleichung $m > n$ gilt.

(g) Für jede natürliche Zahl x und jede natürliche Zahl z gibt es eine natürliche Zahl y, so dass $x = y + z$.

(h) Es gibt eine natürliche Zahl x, so dass für jede natürliche Zahl z eine natürliche Zahl y mit $x = y + z$ existiert.

Schreiben Sie die Aussagen und ihre Negationen jeweils auch mit Quantoren auf. Welche dieser *Negationen* sind wahr?

Aufgabe 7

Schreiben Sie die folgenden Aussagen jeweils als gewöhnlichen Satz, entscheiden Sie, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(a) $\forall\, x \in \mathbb{R}\, \exists\, y \in \mathbb{R} \,:\, x^2 = y$.

(b) $\forall\, y \in \mathbb{R}\, \exists\, x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 = y$.

(c) $\forall\, x \in \mathbb{Z}\, \exists\, y \in \mathbb{Z} \,:\, x^2 = y$.

(d) $\forall\, y \in \mathbb{N}\, \exists\, x \in \mathbb{Z} \,:\, x^2 = y$.

(e) $\forall\, x \in \mathbb{R}\, \exists\, y \in \mathbb{R} \,:\, x + y = 0$.

(f) $\exists\, x \in \mathbb{R}\, \forall\, y \in \mathbb{R} \,:\, x + y = 0$.

(g) $(\forall\, x \in M \,:\, A(x)) \implies (\exists\, x \in M \,:\, A(x))$, wobei $A(x)$ irgendeine Aussage über x und M irgendeine Menge ist.

(h) $(\exists\, x \in M \,:\, A(x)) \implies (\forall\, x \in M \,:\, A(x))$, wobei $A(x)$ irgendeine Aussage über x und M irgendeine Menge ist.

Aufgabe 8

Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

(a) $\neg(\forall\, y\, \exists\, x \,:\, (A(x,y) \implies B(x,y)))$

(b) $\neg(\exists\, x, y\, \forall\, z\, \neg(\forall\, u\, \exists\, v \,:\, A(u,v,x,y,z)))$

Aufgabe 9

Vier Personen A, B, C und D werden von der Polizei verhört. A sagt genau dann die Wahrheit, wenn B lügt. C lügt genau dann, wenn D die Wahrheit sagt. D lügt genau dann, wenn A lügt. Wenn D die Wahrheit sagt, dann auch B. Sagt C die Wahrheit?