OBERSTUFE

Aufgabe 1: [4 P.]

Auf einem Tisch liegen 25 Käsestücke unterschiedlichen Gewichts. Ist es immer möglich, ein Käsestück in zwei Stücke zu zerschneiden und dann den gesamten Käse in zwei Portionen aufzuteilen, die gleichschwer sind, aus gleichvielen Käsestücken bestehen und jede ein zerschnittenes Stück enthält?

Aufgabe 2: [5 P.]

In ein Dreieck ABC werden die Winkelhalbierenden AD und BE eingezeichnet. Wie groß ist der Winkel bei A, wenn DE gerade den Winkel $\angle ADC$ halbiert?

Aufgabe 3: Betrachten Sie eine Menge von 20 positiven Gewichten mit folgender Eigenschaft: Jedes ganzzahlige Gewicht m zwischen 1 und 1997 läßt sich mit Hilfe einer Balkenwaage messen, wobei m in der einen Waagschale liegt und eine Teilmenge der Gewichte in der anderen. Welches ist der kleinste Wert, den das größte vorkommende Gewicht annehmen kann, wenn

a) [3 P.] alle Gewichte ganzzahlig sind;

b) [3 P.] die Gewichte der Menge nicht notwendig ganzzahlig sind?

Aufgabe 4: Ein konvexes Polygon G liegt innerhalb eines konvexen Polygons F, ohne daß sich die Ränder gemeinsame Punkte haben. Eine Sekante s von F (d.h. ein Geradenstück, das von zwei Randpunkten von F begrenzt wird) heißt eine Stütz-Sekante von G, falls s das Polygon G nur in dessen Randpunkten trifft, d.h. s enthält eine Seite oder einen Eckpunkt von G. Beweisen Sie, daß

a) [6 P.] stets eine Stütz-Sekante von G existiert, wobei der Mittelpunkt der Sekante auf dem Rand von G liegt;

b) [2 P.] mindestens zwei derartige Sekanten existieren.

Aufgabe 5: [8 P.]

Die positiven Zahlen a, b, c erfüllen die Gleichung $a\,b\,c = 1$. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leq 1\,.$$

Aufgabe 6: [8 P.]

Für eine natürliche Zahl $n > 1$ seien $F(x)$ und $G(x)$ zwei Polynome mit Koeffizienten 0 oder 1 mit $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1} = F(x)\,G(x)$. Zeigen Sie, daß sich dann eines der Polynome F oder G darstellen läßt in der Form $(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1})\,T(x)$, wobei auch $T(x)$ ein Polynom mit Koeffizienten 0 oder 1 ist und $k > 1$.

Aufgabe 7: [8 P.]

Verschiedene Streifen und ein Kreis vom Radius 1 seien in der Ebene gezeichnet. Die Summe der Breiten aller Streifen beträgt 100. Beweisen Sie, daß man stets die Streifen parallel so verschieben kann, daß sie zusammen den Kreis überdecken.

An Hilfsmittel sind nur das ausgegebene Papier, Bleistift, Lineal und Zirkel zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden. **Viel Erfolg !**