20. Internationaler Mathematik-Städtewettbewerb, Herbst 1998

MITTELSTUFE

Aufgabe 1: [3 P.]

Ein Würfel mit der Kantenlänge 20 ist aus 8000 sich nicht überschneidenden Einheitswürfeln zusammengesetzt. In jeden der Einheitswürfel wird eine Zahl geschrieben. Betrachtet man die zwanzig Würfel irgendeiner Reihe parallel zu den Würfelkanten, so ist die Summe aller hier eingetragenen Zahlen 1. In irgendeinem Einheitswürfel steht die Zahl 10. Durch ihn verlaufen drei Würfelscheiben parallel zu den Würfelflächen. Wie groß ist die Summe aller Zahlen in diesen drei Scheiben?

Aufgabe 2: [3 P.]

Die Dezimaldarstellung einer Quadratzahl endet mit $\ldots 09$. d.h. die letzten beiden Ziffern sind 0 und 9. Zeige, daß dann die drittletzte Ziffer stets gerade sein muß.

Aufgabe 3: [4 P.]

In einem Dreieck ABC ist echt zwischen den Punkten B und C ein Punkt A' gewählt, ebenso zwischen A und B ein Punkt C' und B' zwischen A und C. Es gelten ferner die Winkelbeziehungen $\angle AC'B' = \angle B'A'C$, $\angle CB'A' = \angle A'C'B$ und $\angle BA'C' = \angle C'B'A$. Zeige, daß dann A', B' und C' die Mittelpunkte der betreffenden Dreiecksseiten sind.

Aufgabe 4: [4 P.]

Zwölf Kandidaten für die Wahl eines Bürgermeisters nehmen an einer Talkshow teil. Plötzlich sagt ein Kandidat: „Bis jetzt ist (genau) einmal gelogen worden". Daraufhin sagt ein weiterer Kandidat: „Bis jetzt ist (genau) zweimal gelogen worden". „Nun dreimal!" erwidert ein dritter. Dies geht so weiter, bis schließlich der letzte Kandidat sagt: „Bis jetzt ist (genau) zwölfmal gelogen worden". Daraufhin bricht der Talkmaster die Show ab. Später stellt sich heraus, daß mindestens ein Kandidat die exakte Anzahl der Lügen beschrieben hat. Wie viele Kandidaten haben wirklich gelogen?

Aufgabe 5: [5 P.]

Auf einem unendlich großen Schachbrett kann eine Figur n Felder in eine Richtung (senkrecht oder waagerecht) und dann m Felder in eine dazu senkrechte Richtung ziehen. Eine solche Figur heißt ein (n, m)-*Krokodil*. Beweise, daß man bei vorgegebenen ganzen Zahlen n und m die Schachbrettfelder so schwarz und weiß färben kann, daß ein (n, m)-Krokodil von einem weißen Feld stets auf einem schwarzen Feld landet und umgekehrt.

An Hilfsmittel sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Lineal und Zirkel zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden. **Viel Erfolg !**

20. Internationaler Mathematik-Städtewettbewerb, Herbst 1998

OBERSTUFE

Aufgabe 1: [3 P.] 19 Gewichte mit den Massen 1g, 2g, ..., 19g sind gegeben. Davon sind neun aus Eisen, neun aus Bronze und eins aus purem Gold. Es ist bekannt, daß das Gewicht aller Eisengewichte 90g schwerer als das Gewicht sämtlicher Bronzegewichte ist. Wie schwer ist das Goldgewicht?

Aufgabe 2: [3 P.] n Kreisscheiben aus Papier mit Radius 1 liegen so auf einem Tisch, daß jeder Kreisrand durch einen festen Punkt geht, der selbst im Innern der von den Kreisscheiben gebildeten Fläche liegt. Diese Fläche wird dann von einem *Polygon aus Kreissegmenten* begrenzt. Wie groß ist der Umfang dieses „Polygons"?

Aufgabe 3: [4 P.] Auf einem 8×8 Schachbrett werden 17 Felder markiert. Zeigen Sie, daß es stets zwei dieser markierten Felder gibt, so daß ein Springer mindestens drei Züge braucht, um von einem Feld zum anderen zu kommen.

Aufgabe 4: [4 P.] Es seien 20 Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ mit $0 < x_i < 1$ für jedes i so gewählt, daß die Gleichung

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_{20} = (1 - x_1) \cdot (1 - x_2) \cdots (1 - x_{20})$$

gilt. Bei welchen Zahlen wird das Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdots x_{20}$ maximal?

Aufgabe 5: Psychologen haben einen neuen Intelligenztest entwickelt, der jeder Person exakt eine Zahl Q zuordnet. (Je größer Q, desto intelligenter ist die Person.) Unter dem Intelligenz-Quotienten (IQ) eines Landes versteht man das arithmetische Mittel der Zahlen Q aller Bewohner.

a) [1 P.] Eine Gruppe von Personen wandert von dem Land A in das Land B aus. Zeigen Sie, daß es möglich ist, daß sich dadurch der IQ in beiden Ländern erhöht.

b) [3 P.] Danach wandert eine andere Gruppe von Personen von B (in der sich auch Einwanderer aus A befinden können) nach A aus. Kann es passieren, daß sich dadurch der IQ in beiden Ländern erneut erhöht?

c) [2 P.] Eine Gruppe von Personen wandert von A nach B, und eine andere von B in ein drittes Land C aus. Im Ergebnis erhöht sich dabei jedesmal der IQ der drei Länder. Danach ändern sich die Wanderungsrichtungen: Eine Gruppe wandert von C nach B und eine andere von B nach A. Es stellt sich wieder heraus, daß sich alle drei $IQ's$ gegenüber den Daten nach der ersten Auswanderung erhöht haben. Jedenfalls behaupten das die Nachrichtenagenturen. Falls es stimmt, wie war das möglich, falls nicht, warum nicht? (Dabei wird angenommen, daß sich in dem Betrachtungszeitraum weder die Bevölkerung noch die Intelligenz verändert hat.)

An Hilfsmittel sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Lineal und Zirkel zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden. **Viel Erfolg !**