

24. Internationaler Mathematik-Städtewettbewerb, Herbst 2002

OBERSTUFE

Aufgabe 1: [4 Punkte]

John und Mary denken sich je eine natürliche Zahl aus, die sie Bill vertraulich mitteilen. Bill schreibt die Summe und das Produkt dieser beiden Zahlen auf je ein Blatt Papier. Ein Blatt hält er verdeckt, das andere zeigt er den beiden (auf ihm ist die Zahl 2002 notiert). John schaut sich die Zahl an und erklärt, dass er nicht wisse, welche Zahl Mary sich ausgedacht hat. Mary hört diese Aussage und erklärt dann ihrerseits, dass sie auch nicht wisse, welche Zahl sich John ausgedacht hat. Welche Zahl hat sich Mary ausgedacht?

Aufgabe 2:

- a) [1 Punkt] In einer Klasse wird eine Examensarbeit geschrieben. Dabei ist bekannt, dass mindestens zwei Drittel der Fragen schwer sind, d.h. jede dieser Fragen wird von mindestens zwei Dritteln der Schüler nicht richtig beantwortet. Es ist außerdem bekannt, dass mindestens zwei Drittel der Schüler das Examen bestehen, d.h. jeder von ihnen beantwortet mindestens zwei Drittel aller Fragen richtig. Ist das möglich?
- b) [1 Punkt] Fällt Ihre Antwort genauso aus, wenn an allen Stellen „zwei Drittel“ durch „drei Viertel“ ersetzt wird?
- c) [2 Punkte] Fällt Ihre Antwort genauso aus, wenn an allen Stellen „zwei Drittel“ durch „sieben Zehntel“ ersetzt wird?

Aufgabe 3: [5 Punkte]

Mehrere Geraden, von denen keine zwei parallel sind, zerlegen die Ebene in lauter Teile. In einem dieser Teile wird ein Punkt A gewählt. Zeigen Sie: Genau dann, wenn A in einem unbegrenzten Teil liegt, gibt es einen Punkt B , der bezüglich jeder Geraden auf der anderen Seite wie A liegt.

Aufgabe 4: [5 Punkte]

Es seien x, y, z drei Zahlen aus dem offenen Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$. Zeigen Sie, dass dann die Ungleichung

$$\frac{x \cos(x) + y \cos(y) + z \cos(z)}{x + y + z} \leq \frac{\cos(x) + \cos(y) + \cos(z)}{3}$$

gilt.

Aufgabe 5: [5 Punkte]

Eine unendliche Folge natürlicher Zahlen ist wie folgt definiert: Man erhält den Nachfolger eines Folgenglieds x , indem zu x eine von 0 verschiedene Ziffer aus der Dezimaldarstellung von x addiert wird. Beweisen Sie, dass in dieser Folge immer eine gerade Zahl vorkommen muss.

An Hilfsmittel sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Lineal und Zirkel zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben. Alle Aufgaben haben die gleiche Punktzahl.

Zeit: 4,5 Stunden.

Viel Erfolg !