24- Internationaler Mathematik,Städtewettbewerb, Frühjahr 2003

OBERSTUFE

Aufgabe 1: [4 P.]

In einem beliebigen Tetraeder $ABCD$ seien der Radius der Umkugel mit R, der Radius der Inkugel mit r, die Länge der kürzesten Höhe mit h (von einer Fläche zur gegenüberliegenden Ecke) und die Länge der längsten Kante mit a bezeichnet. Beweisen Sie die Ungleichung $R/r > a/h$.

Aufgabe 2: [5 P.]

Es sei $P(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Weiter gebe es eine Folge paarweise verschiedener natürlicher Zahlen $a_1, a_2, \ldots$ mit $P(a_1) = 0$, $P(a_2) = a_1$, $P(a_3) = a_2, \ldots$. Welchen Grad kann $P(x)$ haben?

Aufgabe 3: [5 P.]

Kann die Oberfläche eines Würfels vollständig und ohne Überlappung durch drei Papier-Dreiecke beklebt werden?

Aufgabe 4: [6 P.]

Ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypothenuse AB habe den Umkreis k. Es sei K der Mittelpunkt des Kreisbogens BC von k, auf dem A nicht liegt, und N der Mittelpunkt der Sehne AC. Schließlich bezeichne M den Schnittpunkt der Geraden NK mit dem Kreis k. Zeichnet man in A und C Tangenten an den Kreis k, die sich in E schneiden, so gilt $\angle EMK = 90°$. Beweis?

Aufgabe 5: [6 P.]

John wählt eine natürliche Zahl größer als 100. Daraufhin nennt Mary eine natürliche Zahl d, $d > 1$. Ist John's Zahl durch d teilbar, so gewinnt Mary. Ist sie es nicht, so zieht John von seiner Zahl d ab, und Mary ist wieder am Zug, wobei sie aber niemals eine Zahl mehrfach nennen darf. Wenn John's Zahl negativ geworden ist, hat Mary verloren. Kann Mary ihre Zahlen so wählen, dass sie immer gewinnt?

Aufgabe 6: [7 P.]

Die Zeichen „+“ oder „−“ werden in allen 16 Kästchen eines 4×4-Tableaus eingetragen. Man darf nun alle Zeichen in irgendeinem Kästchen und in seinen benachbarten Kästchen verändern. Zwei Kästchen heißen benachbart, wenn sie eine Seite gemeinsam haben. Wie viele verschiedene Tableaus kann man erhalten, wenn man diese Prozedur beliebig oft anwendet?

Aufgabe 7: [8 P.]

Innerhalb eines Quadrats seien einige Punkte gewählt, die untereinander und mit den Eckpunkten des Quadrats geradlinig verbunden werden, sofern sich die Strecken nicht schneiden, mit Ausnahme in den Endpunkten. Dadurch wird das Quadrat in lauter Dreiecke zerlegt, wobei die gewählten Punkte Eckpunkte sind und sonst nicht auf Seiten liegen. Für jeden gewählten Punkt und für jeden der vier Quadrateckpunkte ermitteln wir die Anzahl der von ihm ausgehenden Strecken. Kann jede dieser Anzahlen gerade sein?

An Hilfsmittel sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Lineal und Zirkel zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden. **Viel Erfolg !**