25. Internationaler Mathematik-Städtewettbewerb, 14. November 2003

OBERSTUFE

Aufgabe 1: [3 Punkte]

Von jeder Zahl m mit $n+1 \leq m \leq 2n$, n eine natürliche Zahl, nehmen wir den größten ungeraden Teiler. Addieren wir alle diese Teiler auf, so ergibt sich stets n^2. Warum?

Aufgabe 2: [4 Punkte]

Wieviele 1×1-Quadrate muss man mindestens zeichnen, damit ein 25×25-Feld in seine 625 Quadrate zerlegt ist?

Aufgabe 3: [5 Punkte]

Ein Käufer und ein Verkäufer verfügen zusammen über 1999 Rubel in Münzen oder Scheinen zu $1, 5, 10, 50, 100, 500$ oder 1000 Rubel. Der Preis einer Katze im Sack ist ganzzahlig, und der Käufer hat genug Geld, um diese Katze zu kaufen. Zeigen Sie, dass er stets die Katze passend bezahlen, bzw. das Wechselgeld exakt herausbekommen kann.

Aufgabe 4:

Über die vier Seiten eines Quadrats der Seitenlänge 1 werden nach außen vier rechtwinklige Dreiecke so konstruiert, dass die Hypothenusen stets die Quadratseiten sind. Es bezeichnen A, B, C, D die Ecken der rechten Winkel und O_1, O_2, O_3, O_4 die Inkreismittelpunkte der Dreiecke. Zeigen Sie, dass
1) [3 Punkte] der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ nicht größer als 2 ist;
2) [3 Punkte] der Flächeninhalt des Vierecks $O_1O_2O_3O_4$ nicht größer als 1 ist.

Aufgabe 5: [6 Punkte]

Ein (nicht notwendig regelmäßiges) Tetraeder aus Papier wird entlang einiger seiner Kanten so zerschnitten, dass es in der Ebene ausgebreitet werden kann. Kann es passieren, dass es dabei zu Überschneidungen kommen muss?

An Hilfsmittel sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Lineal und Zirkel zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden. **Viel Erfolg !**