Städtewettbewerb Herbst 2004 Lösungsvorschläge

Hamburg

19. November 2004 [Version 20. Dezember 2004]

Mittelstufe

Aufgabe 1 (3 P.) Ist es möglich, die Zahlen von 1 bis 2004 so anzuordnen, dass die Summe von je 10 aufeinanderfolgenden Zahlen stets durch 10 teilbar ist?

LÖSUNG Es ist nicht möglich. Angenommen es wäre möglich, die Zahlen von 1 bis 2004 wie gewünscht anzuordnen. Sei $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$ solch eine Anordnung. Für jedes $1 \leq i \leq 1994$ ist sowohl $a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{i+9}$ als auch $a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_{i+10}$ durch 10 teilbar. Damit ist auch $a_i - a_{i+10}$ durch 10 teilbar. Die Endziffern der einzelnen Zahlen wiederholen sich also alle 10 Schritte. Da alle Endziffern auftreten müssen, sind diese bereits unter beliebigen 10 aufeinanderfolgenden Zahlen vertreten. Da für die Teilbarkeit durch 10 nur die Endziffern ausschlaggebend sind, muss man lediglich die Zahlen 0 bis 9 summieren, um die Summe von 10 aufeinanderfolgenden Zahlen auf die Teilbarkeit durch 10 zu prüfen. Nun ist jedoch

$$0 + 1 + \cdots + 9 = 45.$$

45 ist nicht durch 10 teilbar, im Widerspruch zur Annahme, $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$ sei eine Anordnung wie gewünscht. Also ist es nicht möglich, die Zahlen von 1 bis 2004 so anzuordnen, dass die Summe von jeweils 10 aufeinanderfolgenden Zahlen durch 10 teilbar ist. $\square$

Aufgabe 2 (4 P.) In einer Urne befinden sich rote, grüne, blaue und weiße Kugeln, insgesamt 111 Stück. Wenn Du 100 Kugeln ohne hinzusehen herausnimmst, so sind darunter stets vier Kugeln, die alle unterschiedliche Farben haben. Wie viele Kugeln musst Du (ohne hinzusehen) mindestens herausnehmen, damit darunter garantiert Kugeln von drei unterschiedlichen Farben sind?

LÖSUNG 88. Von jeder Farbe gibt es mindestens 12 Kugeln, da ansonsten alle Kugeln einer Farbe unter den 11 nicht herausgenommenen sein könnten. Nimmt man nun 88 Kugeln heraus, so werden 23 Kugeln zurückgelassen. Diese 23 Kugeln können nicht sämtliche Kugeln von zwei Farben sein, da es von je zwei Farben zusammen mindestens 24 Kugeln gibt. 88 Kugeln sind somit ausreichend. Sie sind auch notwenig, denn die Verteilung mit jeweils 12 roten, grünen und blauen Kugeln und 75 weißen Kugeln erfüllt die Voraussetzungen. Unter 87 Kugeln müssen hier aber nur zwei Farben vertreten sein (z.B. rot und weiß). $\square$

Aufgabe 3 (4 P.) In einem fernen Land sind einige Städte durch Buslinien verbunden. Jede Buslinie verbindet genau zwei Städte direkt, d.h. ohne Zwischenstop. Jede Stadt ist von jeder anderen Stadt per Bus erreichbar – allerdings ist dabei möglicherweise ein mehrfaches Umsteigen notwendig. Herr Ivanov kauft nun für jede Buslinie eine Fahrkarte, die es ihm erlaubt, diese Buslinie einmal entweder in der einen oder in der anderen Richtung zu benutzen. Herr Petrov dagegen kauft n Fahrkarten für jede Buslinie. Herr Ivanov und Herr Petrov starten beide in der Stadt A. Herr Ivanov kommt, nachdem er sämtliche seiner Fahrkarten verbraucht hat, in der Stadt B an, ohne unterwegs zusätzliche Fahrkarten gekauft zu haben. Herr Petrov landet in der Stadt X, nachdem er einige seiner Fahrkarten verbraucht hat. Diese Stadt kann er nur verlassen, wenn er eine neue Fahrkarte kauft. Zeige, dass X entweder A oder B ist.

Lösung Da Herr Ivanov jede Strecke genau einmal benutzt und auf der Fahrt jede andere Stadt als A oder B wieder verlassen kann, verlässt er jede solche Stadt ebenso oft wie er sie betritt. Damit besitzt jede Stadt außer A und B eine gerade Anzahl an Busverbindungen. Herr Petrov, welcher von jeder Linie n Karten besitzt, hat damit für jede Stadt genau die n-fache Anzahl an Karten wie es dort Busverbindungen gibt. Also besitzt er für jede Stadt außer A und B eine gerade Anzahl an Tickets und kann somit jede solche Stadt stets wieder verlassen. Die Stadt X, welche er am Ende nicht mehr verlassen kann, ist daher zwangsläufig A oder B. □

Bemerkung Durch ähnliche Überlegungen erhält man $X = B$ für n ungerade und $X = A$ für n gerade.

Aufgabe 4 (5 P.) In der Ebene sind ein Kreis und eine Gerade gegeben, die sich nicht schneiden. Konstruiere nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal ein Quadrat, von dem zwei benachbarte Ecken auf dem Kreis und die beiden anderen Ecken auf der Geraden liegen. Dabei sei vorausgesetzt, dass ein solches Quadrat existiert.

Lösung Es werden einige Standard-Konstruktionen vorausgesetzt.

(a) Konstruiere den Mittelpunkt M des Kreises.

(b) Fälle von M das Lot auf die Gerade. Der Fußpunkt sei F.

(c) Konstruiere in M die zu FM senkrechte Gerade und markiere darauf einen Punkt Q mit $|MQ| = \frac{1}{2}|FM|$.

(d) Verbinde Q mit F.

Der erste Schnittpunkt (von F aus gesehen) mit dem Kreis ist eine Quadratecke. Die anderen drei Eckpunkte ergeben sich dann sofort durch Fällen der Lote auf die gegebene Gerade bzw. auf MF. □

Bemerkung Im Allgemeinen schneidet die Gerade durch Q und F den Kreis zweimal. Beide Schnittpunkte liefern ein geeignetes Quadrat. Im Fall $|MF| = \sqrt{5}r$ (mit r dem Radius des Kreises) fallen die beiden Schnittpunkte zusammen und es gibt genau ein geeignetes Quadrat.

Aufgabe 5 (5 P.) Auf wie viele verschiedene Weisen kannst Du die Zahl 2004 als Summe von positiven ganzen Zahlen schreiben, die alle untereinander „annähernd gleich“ sind? Dabei heißen zwei Zahlen annähernd gleich, wenn sie sich höchstens um 1 unterscheiden. Zwei Summen, bei denen sich die Summanden nur in der Reihenfolge unterscheiden, werden dabei als gleich gewertet.

Lösung Auf genau 2004 Weisen ist dies möglich. Zu jedem $n \in \{1, 2, \ldots, 2004\}$ gibt es nämlich genau eine Darstellung von 2004 als Summe von n annähernd gleichen Zahlen. Hat man n gewählt, so verwende man $d = \lfloor 2004/n \rfloor$ n mal. Hierbei bezeichnet $\lfloor 2004/n \rfloor$ den abgerundeten Wert von $2004/n$. Damit erhält man in der Summe $n \cdot \lfloor 2004/n \rfloor$. Falls n ein Teiler von 2004 ist, so ist man fertig. Andernfalls ergibt sich ein Rest r, der kleiner als n ist, so dass man 2004 nun durch Erhöhung von $r < n$ der Summanden um 1 darstellen kann. Andererseits ist die Darstellung durch n eindeutig bestimmt, denn hat man eine Darstellung der Länge n, also $2004 = x\,d + y\,(d+1)$ mit $x + y = n$ und $x > 0$, so folgt

$$d \leq \frac{2004}{n} = d + \frac{y}{n} < d + 1,$$

so dass d durch $d = \lfloor 2004/n \rfloor$ eindeutig bestimmt ist. □

Alternative Lösung Es gibt genau 2004 verschiedene Weisen, für jede Anzahl n von Summanden mit $1 \leq n \leq 2004$ eine. Andere Anzahlen von Summanden kommen trivialerweise nicht in Frage. Sei nun $1 \leq n \leq 2004$ gegeben. Dann ist $d := \frac{2004}{n}$ das arithmetische Mittel der n Summanden. Ist d ganzzahlig, so sind alle Summanden gleich d; denn gäbe es einen Summanden größer oder kleiner als d, so gäbe es zwangsläufig sowohl einen Summanden größer als auch einen kleiner als d – diese Summanden hätten die Differenz mindestens 2, was den Voraussetzungen widerspricht. Ist d nicht ganzzahlig, so gibt es sowohl Summanden größer als auch welche kleiner als d. Damit kann kein Summand um mehr als 1 von d abweichen und alle Summanden sind entweder $\lfloor d \rfloor$ (d abgerundet) oder $\lfloor d \rfloor + 1$. In beiden Fällen müssen in der Summe genau $2004 - n\lfloor d \rfloor$ Summanden der Größe $\lfloor d \rfloor + 1$ vorhanden sein. Die restlichen Summanden haben die Größe $\lfloor d \rfloor$. □

Oberstufe

Aufgabe 1 (3 P.) Drei Kreise schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt X. Die weiteren drei Schnittpunkte je zweier Kreise seien A, B und C. Nun sei A' der Schnittpunkt der Geraden durch A und X mit dem Umkreis des Dreiecks BCX. Analog seien die Punkte B' und C' definiert. Zeigen Sie, dass die Dreiecke ABC', $AB'C$ und $A'BC$ ähnlich sind.

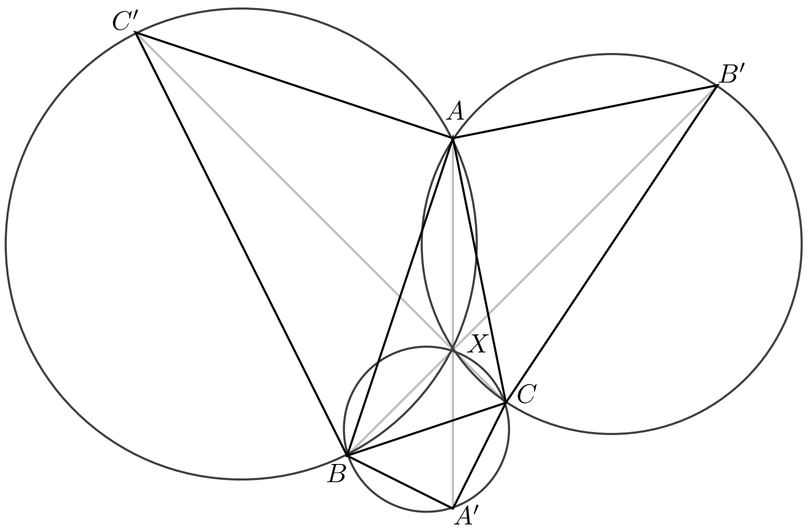

Abbildung 1: Zeichnung zu Lösung 1 der Oberstufe

Lösung Zeichnung siehe Abbildung 1. Nach Peripheriewinkelsatz (bezüglich der Sehne AB' bzw. BA') gilt:

$$\angle B'CA = \angle B'XA \tag{1}$$

bzw.

$$\angle BXA' = \angle BCA'.$$

Da $\angle B'XA$ und $\angle BXA'$ Scheitelwinkel sind, folgt hieraus

$$\angle B'CA = \angle BCA'.$$

Da $AC'BX$ ein Sehnenviereck ist und die Winkel $\angle B'XA$ und $\angle AXB$ Nebenwinkel sind, erhält man mit (1)

$$\angle B'CA = \angle B'XA = 180° - \angle AXB = \angle BC'A.$$

Analog ergibt sich $\angle CAB' = \angle C'AB = \angle CA'B$ und $\angle AB'C = \angle ABC' = \angle A'BC$. Die Dreiecke ABC', $AB'C$ und $A'BC$ sind somit ähnlich. □

Aufgabe 2 (3 P.) Eine Urne enthält rote, blaue und weiße Kugeln, insgesamt 100 Stück. Immer wenn Sie 26 Kugeln herausnehmen ohne sie anzuschauen, so sind darunter stets zehn Kugeln gleicher Farbe. Wie viele Kugeln müssen Sie mindestens herausnehmen (ohne sie anzuschauen), damit darunter garantiert 30 gleichfarbige Kugeln sind?

LÖSUNG 66. Es gibt

Fall 1: zwei Farben, von denen sich in der Urne je höchstens 8 Kugeln befinden, oder

Fall 2: eine Farbe mit höchstens 7 Kugeln.

Andernfalls ließen sich 26 Kugeln mit einer Farbverteilung $(8, 9, 9)$ finden, unter denen sich keine 10 gleichfarbigen befinden.

Unter 66 Kugeln befinden sich im ersten Fall $66 - 8 - 8 = 50$ gleichfarbige (46 Kugeln hätten hier also bereits ausgereicht). Im zweiten Fall enthalten 66 Kugeln mindesten $66 - 7 = 59 = 29 + 30$ Kugeln höchstens zweier Farben, unter denen nach Schubfachprinzip 30 gleichfarbige sind.

66 Kugeln sind auch notwendig, da die Farbverteilung mit 7 roten, 29 blauen und 64 weißen Kugeln eine zulässige ist (unter 26 Kugeln befinden sich mindestens $26 - 7 = 19$ Kugeln der Farben blau und weiß und nach Schubfachprinzip auch 10 gleichfarbige) und unter 65 Kugeln z.B. 7 rote und 29 blaue bzw. weiße Kugeln, d.h. keine 30 gleichfarbigen sein können. □

Aufgabe 3 (4 P.) Es seien $P(x)$ und $Q(x)$ zwei Polynome positiven Grades. Für jedes x gelte

$$P\big(P(x)\big) = Q\big(Q(x)\big) \qquad \text{und} \qquad P\big(P\big(P(x)\big)\big) = Q\big(Q\big(Q(x)\big)\big).$$

Folgt daraus notwendigerweise $P(x) = Q(x)$?

LÖSUNG Bekanntermaßen hat ein Polynom vom Grad n höchstens n Nullstellen. Zwei Polynome, die an unendlich vielen Stellen übereinstimmen, sind daher identisch. Aus den beiden Voraussetzungen folgt $P(P(P(x))) = Q(P(P(x)))$. Nimmt nun $P(P(x))$ unendlich viele Werte an, so folgt direkt $P(x) = Q(x)$. Für beliebiges c hat das Polynom $P(P(x)) - c$ nur endlich viele Nullstellen, $P(P(x))$ nimmt den Wert c also an nur endlich vielen Stellen an. Nähme $P(P(x))$ nur endlich viele Werte an, so würden diese daher insgesamt nur an endlich vielen Stellen angenommen. Da es aber unendlich viele Werte für x gibt, ist dies ein Widerspruch. Damit nimmt $P(P(x))$ unendlich viele verschiedene Werte an und es folgt $P(x) = Q(x)$. □

Bemerkung Mit deutlich komplizierteren Überlegungen kann man $P(x) = Q(x)$ bereits aus der Bedingung $P(P(P(x))) = Q(Q(Q(x)))$ folgern.

Aufgabe 4 (4 P.) Auf wie viele verschiedene Weisen können Sie die Zahl 2004 als Summe von positiven ganzen Zahlen schreiben, die alle untereinander „annähernd gleich“ sind? Dabei heißen zwei Zahlen annähernd gleich, wenn sie sich höchstens um 1 unterscheiden. Zwei Summen, bei denen sich die Summanden nur in der Reihenfolge unterscheiden, werden dabei als gleich gewertet.

LÖSUNG Siehe Lösung 5 der Mittelstufe. □

Aufgabe 5 (5 P.) Für welche natürlichen Zahlen N lassen sich die Zahlen von 1 bis N so anordnen, dass die Summe von je k aufeinander folgenden Zahlen, $k \geq 2$, nicht durch k teilbar ist?

LÖSUNG Genau die geraden Zahlen $2, 4, 6, \ldots$ lassen sich in dieser Weise anordnen. Dass sich die ungeraden Zahlen $N = 2l + 1$ nicht so anordnen lassen, erkennt man, indem man für $k = N$ berechnet:

$$1 + 2 + \cdots + (2l + 1) = \frac{(2l + 1)(2l + 2)}{2} = (l + 1)\,(2l + 1),$$

eine offensichtlich durch $N = 2l + 1$ teilbare Zahl. Für gerades N betrachten wir die Folge

$$(a_n) = (2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, \ldots),$$

also

$$a_{2l-1} = 2l \quad \text{und} \quad a_{2l} = 2l - 1,$$

für $l = 1, 2, 3 \ldots$. Dann ist für $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} s_{2l} :=& a_1 + a_2 + \cdots + a_{2l} = 1 + 2 + \cdots + 2l \\ =& \frac{2l(2l + 1)}{2} = l\,(2l + 1) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} s_{2l+1} :=& a_1 + a_2 + \cdots + a_{2l+1} = 1 + 2 + \cdots + 2l + (2l + 2) \\ =& \frac{(2l + 1)(2l + 2)}{2} + 1 = (l + 1)(2l + 1) + 1. \end{aligned}$$

Daraus berechnet sich sofort

$$\begin{aligned} & a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+k-1} = s_{n+k-1} - s_{n-1} \\ =& \begin{cases} nk + \frac{k}{2}\,(k - 1) \equiv \frac{k}{2} \pmod{k}, & k \equiv 0 \pmod{2}; \\ nk + k\,\frac{k-1}{2} - 1 \equiv -1 \pmod{k}, & n \equiv 0,\ k \equiv 1 \pmod{2}; \\ nk + k\,\frac{k-1}{2} + 1 \equiv 1 \pmod{k}, & n \equiv 1,\ k \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

so dass in allen Fällen $a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+k-1}$ nicht durch k teilbar ist. □

Fragen und Anmerkungen Schicken Sie diese bitte an Prof. Dr. Helmut Müller <mueller@math.uni-hamburg.de>. An den Lösungen haben außerdem mitgewirkt: Lilian Matthiesen, Klaus Sielaff, Philipp Sprüssel und Jan Henrik Sylvester.