

OBERSTUFE

Aufgabe 1: [3 Punkte]

Drei Kreise schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt X . Die weiteren drei Schnittpunkte je zweier Kreise seien A , B und C . Nun sei A' der Schnittpunkt der Geraden durch A und X mit dem Umkreis des Dreiecks BCX . Analog seien die Punkte B' und C' definiert. Zeigen Sie, dass die Dreiecke ABC' , $AB'C$ und $A'BC$ ähnlich sind.

Aufgabe 2: [3 Punkte]

Eine Urne enthält rote, blaue und weiße Kugeln, insgesamt 100 Stück. Immer wenn Sie 26 Kugeln herausnehmen ohne sie anzuschauen, so sind darunter stets zehn Kugeln gleicher Farbe. Wie viele Kugeln müssen Sie mindestens herausnehmen (ohne sie anzuschauen), damit darunter garantiert 30 gleichfarbige Kugeln sind?

Aufgabe 3: [4 Punkte]

Es seien $P(x)$ und $Q(x)$ zwei Polynome positiven Grades. Für jedes x gelte $P(P(x)) = Q(Q(x))$ und $P(P(P(x))) = Q(Q(Q(x)))$. Folgt daraus notwendigerweise $P(x) = Q(x)$?

Aufgabe 4: [4 Punkte]

Auf wie viele verschiedene Weisen können Sie die Zahl 2004 als Summe von positiven ganzen Zahlen schreiben, die alle untereinander „annähernd gleich“ sind? Dabei heißen zwei Zahlen annähernd gleich, wenn sie sich höchstens um 1 unterscheiden. Zwei Summen, bei denen sich die Summanden nur in der Reihenfolge unterscheiden, werden dabei als gleich gewertet.

Aufgabe 5: [5 Punkte]

Für welche natürlichen Zahlen N lassen sich die Zahlen von 1 bis N so anordnen, dass die Summe von je k aufeinander folgenden Zahlen, $k \geq 2$, nicht durch k teilbar ist?

Alle Aussagen und Feststellungen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen!

An Hilfsmittel sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden.

Viel Erfolg !