26. Internationaler Mathematik-Städtewettbewerb, 11. März 2005

MITTELSTUFE

Aufgabe 1: [4 Punkte]

Auf dem Graphen eines quadratischen Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten werden zwei Punkte mit ganzzahligen Koordinaten gewählt. Zeige, dass die Verbindungsstrecke zwischen diesen beiden Punkten parallel zur x-Achse verlaufen muss, wenn diese beiden Punkte einen ganzzahligen Abstand voneinander haben.

Aufgabe 2: [5 Punkte]

In einem Dreieck ABC schneiden sich die Höhen AA' und BB' in dem Punkt H. Ferner bezeichnen X und Y die Mittelpunkte der Strecken AB bzw. CH. Zeige, dass sich die beiden Geraden durch $A'B'$ und durch XY rechtwinklig schneiden.

Aufgabe 3: [5 Punkte]

Die Uhr des Barons Münchhausen geht zwar richtig, allerdings befinden sich auf dem Zifferblatt keinerlei Markierungen, nur der Stunden-, Minuten- und Sekundenzeiger sind zu sehen. Der Baron behauptet nun, dass er trotzdem in der Tagzeit (von 8:00 Uhr bis 19:59) die genaue Uhrzeit ablesen kann, denn die Stellung der drei Zeiger zueinander wiederholt sich in dieser Zeit niemals. Hat der Baron recht oder nicht? (Die Zeiger haben unterschiedliche Längen und bewegen sich gleichförmig.)

Aufgabe 4:

Ein kariertes Blatt mit den Maßen 10×12 wird so lange entlang der Karolinien gefaltet, bis sich ein 1×1-Karo ergibt. In wie viele Teile zerfällt das Blatt, wenn man das Karo

a) [2 Punkte] entlang der Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Seiten bzw.

b) [4 Punkte] entlang der Mittelpunkte zweier benachbarter Seiten

gerade durchschneidet. (Finde alle möglichen Anzahlen und zeige, dass es keine weiteren gibt.)

Aufgabe 5: [6 Punkte]

Ein Satz von Spielsteinen besteht aus lauter Quadern, die sich alle in einer großen quaderförmigen Box unterbringen lassen. Durch einen Produktionsfehler wird bei jedem Spielstein eine Kante verkürzt. Ist es trotzdem möglich, wieder alle Spielsteine in einer quaderförmige Box unterzubringen, deren eine Kante kleiner als bei der Originalbox ist? (Die Steine müssen stets parallel zu den Kanten der Box liegen.)

Aufgabe 6: [6 Punkte]

John und James wollen durch ein Spiel die vor ihnen liegenden 25 Münzen zu 1 Cent, 2 Cent, $\ldots$, 25 Cent unter sich aufteilen. Bei jedem Schritt wählt einer eine Münze, während der andere bestimmen kann, wer sie bekommt. John beginnt. Immer der, der bereits die meisten Cent erhalten hat, wählt die nächste Münze. Haben beide gleich viel, so wählt der letzte erneut. Kann John so spielen, dass er am Ende mehr Cent erhalten hat als James, oder kann James dies stets verhindern?

Aufgabe 7: [8 Punkte]

Die 64 Quadrate eines Schachbretts werden wie folgt nummeriert. Das Feld links oben erhält die Zahl 1, sein rechter Nachbar die 2, sein unterer Nachbar die 3. Die nächsten drei Felder in der (Neben-) Diagonalen enthalten die Zahlen $4, 5$ und 6 usw. Jede (Neben-) Diagonale wird also von rechts oben nach links unten aufsteigend nummeriert. So fortfahrend gelangt man schließlich zu der vorletzten Zweierdiagonalen mit den Zahlen 62 und 63 und zu der Zahl 64 rechts unten.
Peter legt nun auf das Brett 8 Steine und zwar so, dass in jeder Zeile und jeder Spalte genau ein Stein zu liegen kommt. Dann verschiebt er jeden Stein auf ein Feld mit einer größeren Zahl. Kann es sein, dass dann immer noch in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein Stein liegt?

Alle Aussagen und Feststellungen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen!

An Hilfsmittel sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden. **Viel Erfolg !**