Städtewettbewerb Frühjahr 2007
Lösungsvorschläge

Hamburg

29. März 2007 [Version 12. April 2007]

M Mittelstufe

Aufgabe M.1 (4 P.). Zeichne, ohne abzusetzen, fünf gerade Linien so, dass ein fünfzackiger Stern entsteht. Dieser Stern besteht dann aus fünf Dreiecken und einem Fünfeck.

Es stellt sich nun heraus, dass alle fünf Dreiecke kongruent sind. Muss dann das Fünfeck regelmäßig sein (d. h. gleich lange Seiten und gleiche Winkel haben)?

Lösung. Die Winkel in zwei benachbarten Dreiecken, die sich an einer Ecke berühren, müssen gleich groß sein. Die Innenwinkel des Fünfecks sind jeweils komplementär dazu.

Angenommen alle drei Winkel in einem Dreieck wären verschieden. Dann kann kein Innenwinkel des Fünfecks dreimal auftauchen, da zwei benachbarte Ecken verschiedene Winkel haben müssen. Also treten zwei Winkel doppelt und einer einfach auf. Der zu dem einfach vorkommenden komplementäre Dreieckswinkel sei γ, die anderen beiden α und β. Die Innenwinkelsumme im Fünfeck beträgt $540°$, also

$$540° = 2(180° - \alpha) + 2(180° - \beta) + (180° - \gamma),$$

woraus sich sofort

$$360° = 2\alpha + 2\beta + \gamma$$

ergibt. Da die Innenwinkelsumme im Dreieck aber

$$180° = \alpha + \beta + \gamma$$

ergibt, müsste $\gamma = 0$ sein, was nicht möglich ist. Also können die drei Winkel nicht verschieden sein.

Sind zwei der Dreieckswinkel gleich, seien diese als α bezeichnet und der dritte als β. Kämen von α und β die Komplementärwinkel als Innenwinkel im Fünfeck vor, so müsste dort entweder ein Winkel dreifach (α) und einer doppelt (β) vorkommen oder ein Winkel vierfach (α) und der andere einfach (β) vorkommen. Analog zu oben ergibt sich

$$360° = 3\alpha + 2\beta \qquad \text{bzw.} \qquad 360° = 4\alpha + \beta.$$

Zusammen mit der Innenwinkelsumme im Dreieck $180° = 2\alpha + \beta$ ergibt sich wie oben ein Widerspruch ($180° = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha = 0$ bzw. $180° = 2\alpha \Rightarrow \beta = 0$). Es können also nicht α und β als Komplementärwinkel zu den Innenwinkeln des Fünfecks auftauchen.

Also müssen die Dreieckswinkel, die komplementär zu den Innenwinkeln des Fünfecks liegen, alle gleich groß sein. Daher sind alle Innenwinkel des Fünfecks gleich groß. Da die Dreiecke kongruent sind, stimmen auch die Seitenlängen überein. Das Fünfeck ist damit regelmäßig. □

Alternative Lösung. Die Ecken des Sterns, die auch Ecken des Fünfecks sind, nennen wir *innere Ecken*, die anderen Ecken sind *äußere Ecken*. Ist γ der Innenwinkel des Fünfecks an einer beliebigen Ecke, so ist der Innenwinkel des Sterns an der gleichen Ecke $360° - \gamma$. Summiert man alle diese Winkel auf, erhält man, da die Innenwinkelsumme im Fünfeck $540°$ beträgt, $1800° - 540° = 1260°$. Da die Innenwinkelsumme im Stern $1440°$ beträgt, ist die Summe der Winkel an den äußeren Ecken gerade $1440° - 1260° = 180°$.

Betrachtet man eine beliebige innere Ecke, so sind die beiden Winkel der Dreiecke an dieser Ecke identisch. Jeder Winkel tritt also immer paarweise als Winkel an inneren Ecken auf und somit insgesamt gerade häufig an inneren Ecken. Hätte das Dreieck nun drei verschiedene Winkel, könnte jeder maximal viermal an einer inneren Ecke auftreten. Somit träte jeder Winkel an einer äußeren Ecke auf, so dass sich bereits durch diese drei Winkel eine Summe von $180°$ ergäbe, Widerspruch. Also ist das Dreieck gleichschenklig, sagen wir mit Winkeln α, β und β. Da α ungerade häufig an äußeren Ecken auftritt, tritt β entweder gar nicht oder mindestens zweimal an äußeren Ecken auf. Im letzteren Fall ergibt sich aber erneut bereits durch drei Winkel an äußeren Ecken eine Summe von $180°$, Widerspruch. Also tritt β nie an äußeren Ecken auf. Dies bedeutet, dass jeder Innenwinkel des Fünfecks $180° - \beta$ beträgt und dass jede Seite des Fünfecks ebenso lang ist wie die Basis des Dreiecks. Somit ist das Fünfeck regulär. □

Aufgabe M.2 (4 P.)**.** Zwei 2007-stellige Zahlen werden auf eine Tafel geschrieben. Es ist bekannt, dass man bei jeder der beiden Zahlen so 7 Ziffern wegstreichen kann, dass sich zwei gleiche Zahlen ergeben. Beweise, dass man dann auch zu den beiden ursprünglichen Zahlen jeweils 7 Ziffern hinzufügen kann, um zwei gleiche Zahlen zu erhalten.

Lösung. Für jede der jeweils sieben Ziffern, die man bei den 2007-stelligen Zahlen (genannt A und B) wegstreichen kann, um identische 2000-stellige Zahlen zu erhalten, notiere man sich, wie viele Ziffern der verbleibenden 2000-stelligen Zahl in der 2007-stelligen Zahl hinter dieser Ziffer stehen. Nun füge man diese sieben Ziffern der Zahl A so in die 2007-stellige Zahl B ein, dass hinter ihnen jeweils die für diese Ziffer notierte Anzahl Ziffern der – bei beiden gleichen – 2000-stelligen Zahl steht. (Falls von den sieben wegstreichbaren Ziffern der Zahl A mehrere direkt hintereinander stehen, belasse man sie in dieser Reihenfolge zum Einfügen in die Zahl B.)

Dieses Vorgehen ist immer dann eindeutig möglich, wenn an der Stelle in der Zahl B, wo man die Ziffern einfügen muss, nicht eine oder mehrere Ziffern stehen, die zu den sieben in dieser Zahl wegstreichbaren Ziffern gehören. Für eine solche Situation treffe man die Wahl, die Ziffern der Zahl A immer hinter diese Ziffer(n) der Zahl B einzufügen.

Genauso gehe man nun vor und füge die sieben wegstreichbaren Ziffern der Zahl B in die Zahl A ein. Bei einer Uneindeutigkeit füge man die Ziffern immer vor die entsprechenden Ziffern der Zahl A ein.

Auf diese Weise hat man in die 2007-stelligen Zahlen A und B jeweils sieben Ziffern so eingefügt, dass die beiden entstehenden 2014-stelligen Zahlen identisch sind. □

Aufgabe M.3 (4 P.)**.** Wie viele Türme muss man auf einem 8×8-Schachbrett mindestens platzieren, um alle weißen Felder zu bedrohen? (Ein Feld wird von einem Turm genau dann bedroht, wenn es in der gleichen Zeile oder Spalte liegt.)

LÖSUNG. Mit 3 Türmen ist dieses nicht möglich, da jeder Turm maximal 8 weiße Felder angreift, also alle zusammen maximal 24 der 32.

Mit 4 Türmen ist es möglich (die weißen Felder sind jeweils mit einem Punkt markiert):

·	T	·		·		·	
	·		·		·		·
·		·	T	·		·	
	·		·		·		·
·		·		·	T	·	
	·		·		·		·
·		·		·		·	T
	·		·		·		·

□

Aufgabe M.4 (4 P.)**.** Es seien drei reelle Zahlen $\neq 0$ gegeben, (z. B. a, b, c). Setzt man sie in beliebiger Reihenfolge als Koeffizienten eines quadratischen Polynoms ein (z. B. ax^2+bx+c oder bx^2+cx+a), so habe jedes dieser Polynome eine reelle Nullstelle.

Ist es dann wahr, dass jedes dieser Polynome eine positive Nullstelle hat?

LÖSUNG. Die Nullstellen von $ax^2 + bx + c$ sind

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

wobei $b^2 - 4ac \geq 0$, da es eine reelle Lösung gibt.

Nun wird untersucht, wann es mindestens eine positive Lösung gibt. Erste Bedingung: Haben a und b verschiedenes Vorzeichen ($ab < 0$), so ist zumindest diejenige Lösung positiv, bei der das Vorzeichen von a vor der Wurzel steht. Zweite Bedingung: Überwiegt der Wurzelterm im Zähler ($\sqrt{b^2 - 4ac} > |b|$), so ist ebenfalls zumindest diejenige Lösung positiv, bei der das Vorzeichen von a vor der Wurzel steht. Das ist genau dann der Fall, wenn $-4ac > 0$ ist, also wenn a und c unterschiedliches Vorzeichen haben.

Alle bisherigen Überlegungen gelten für jede Permutation von a, b und c. Also haben alle solchen quadratischen Polynome eine positive Lösung, wenn a, b und c nicht alle das gleiche Vorzeichen besitzen. (Dann ist nämlich für jede Permutation eine der beiden Bedingungen oben erfüllt.)

a, b und c können aber nicht alle das gleiche Vorzeichen haben, weil sonst nicht alle Bedingungen für reelle Lösungen

$$a^2 - 4bc \geq 0 \qquad \wedge \qquad b^2 - 4ac \geq 0 \qquad \wedge \qquad c^2 - 4ac \geq 0$$

erfüllt sein können. Falsch ist zumindest die, bei welcher bei derjenigen Variablen das Quadrat steht, die am nächsten an Null ist (die betragsmäßig kleinste).

Die Behauptung in der Aufgabe trifft also zu. □

Alternative Lösung. Die Antwort ist ja. Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, $abc \neq 0$ und

$$aX^2 + bX + c = a(X - x_1)(X - x_2),\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $b^2 - 4ac \geq 0$ und $b = -a(x_1 + x_2)$, $c = ax_1x_2$ (Vieta). Nun gilt folgendes

Hilfssätzchen. Unter den genannten Voraussetzungen gilt $x_1, x_2 < 0$ genau dann, wenn a, b, c das gleiche Vorzeichen haben.

Beweis. Sind $x_1, x_2 < 0$, so folgt $x_1x_2 > 0$, $x_1 + x_2 < 0$ und mit den Formeln von Vieta sofort, dass a, b, c alle das gleiche Vorzeichen haben müssen. Seien nun a, b, c alle positiv. Dann ist auch x_1x_2 positiv, also haben x_1, x_2 beide das gleiche Vorzeichen. Wäre es positiv, so wäre auch $x_1 + x_2$ positiv und daher b negativ, Widerspruch! Sind alle a, b, c negativ, so multipliziere man das Ausgangspolynom mit -1, was an den Nullstellen nichts ändert.

Nun können aber nicht alle Koeffizienten a, b, c positiv sein, denn dann folgte mit $0 < a \leq b \leq c$ weiter

$$a^2 \geq 4bc \geq 4a^2,$$

also $1 \geq 4$, Widerspruch! Daher haben nicht alle Zahlen a, b, c das gleiche Vorzeichen, so dass jedes der auftretenden Polynome mindestens eine positive Nullstelle hat. □

Aufgabe M.5. (a) (1 P.) Eine Pizza habe die Form eines Dreiecks, bei dem ein Winkel dreimal so groß ist wie ein anderer Winkel. Die Pizza soll nun in einen dreieckigen Karton gesteckt werden. Allerdings geht das Karton-Dreieck aus dem Pizza-Dreieck durch eine Spiegelung längs einer Geraden hervor. Wie kann man die Pizza so in zwei Teile zerschneiden, dass sie überschneidungsfrei und ohne Umdrehen in den Karton passen?

(b) (4 P.) Gleiches Problem wie in a, nur dass jetzt das Pizza-Dreieck stumpfwinklig ist, wobei der stumpfe Winkel doppelt so groß ist wie einer der anderen Winkel.

Lösung. (a) Die Ecken des Dreiecks seien A, B und C. Der Winkel $\angle BAC$ sei dreimal so groß wie $\alpha := \angle CBA$ (siehe Abbildung 1).

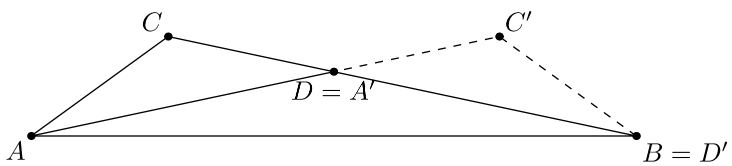

Abbildung 1: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.5 a. Das Dreieck wird entlang der Linie AD zerschnitten und das Dreieck ΔADC nach $\Delta A'D'C'$ verschoben.

Man wählt D auf der Seite BC derart, dass $\angle BAD = \alpha$. Das Dreieck ΔABD ist somit gleichschenklig, und auch ΔADC ist gleichschenklig, da

$$\angle CDA = 180° - \angle ADB = 180° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha = \angle DAC.$$

Nun verschiebt man das Dreieck ΔADC und erhält $\Delta A'D'C'$. Wegen $|AD| = |BD|$ kann man dies derart tun, dass $A' = D$ und $D' = B$. Dabei ergibt sich aus der Gleichschenkligkeit beider Dreiecke, dass $\angle ADC' = 180°$, also füllen die beiden Teile ΔABD und $\Delta A'D'C'$ das Dreieck $\Delta ABC'$ exakt aus. Zudem ist $\angle BAC' = \alpha = \angle CBA$ und $\angle C'BA = 3\alpha = \angle BAC$, also geht $\Delta ABC'$ durch eine Spiegelung aus ΔABC hervor.

(b) Die Ecken des Dreiecks seien A, B und C. Der Winkel $\angle ACB$ sei stumpf und doppelt so groß wie $\alpha := \angle BAC$ (siehe Abbildung 2).

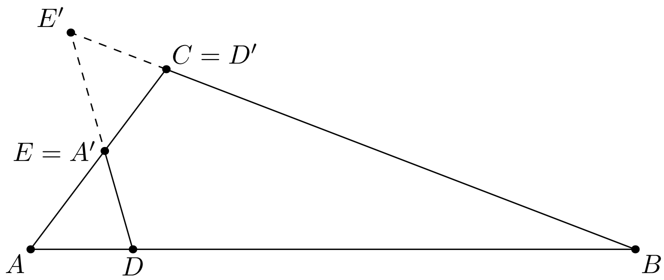

Abbildung 2: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.5 b. Das Dreieck wird entlang der Linie DE zerschnitten und das Dreieck ΔADE nach $\Delta A'D'E'$ verschoben.

Man wählt D auf der Seite AB derart, dass $|BD| = |BC|$. Dann wählt man E auf der Seite AC so, dass $\angle BDE = \angle ACB = 2\alpha$. Dann ist

$$\begin{aligned}\angle DEC =& 360° - (\angle BDE + \angle CBD + \angle ECB)\\ =& 360° - (2\alpha + 180° - 3\alpha + 2\alpha) = 180° - \alpha.\end{aligned}$$

Hieraus folgt $\angle AED = \alpha$, also ist das Dreieck ΔADE gleichschenklig mit $|AD| = |ED|$. Da im Viereck $DBCE$ die Kanten BD und BC gleich lang und die Winkel $\angle BDE$ und $\angle ECB$ gleich groß sind, sind auch die Kanten ED und EC gleich lang.

Man kann also das Dreieck ΔADE derart in ein Dreieck $\Delta A'D'E'$ verschieben, dass $A' = E$ und $D' = C$. Wegen $\angle DAE = \angle AED$ ist $\angle DEE' = 180°$, und wegen $\angle EDA = 180° - 2\alpha$ ist $\angle E'CB = 180°$, deshalb füllen die beiden Teile $DBCE$ und $\Delta A'D'E'$ das Dreieck $\Delta DBE'$ exakt aus. Außerdem ist $\angle DE'B = \alpha = \angle BAC$ und $\angle BDE' = 2\alpha = \angle ACB$, also geht $\Delta DBE'$ durch eine Spiegelung aus ΔABC hervor.

□

O Oberstufe

Aufgabe O.1 (3 P.)**.** Die 81 Quadrate eines 9×9-Feldes seien abwechselnd schwarz und weiß gefärbt, wobei die Eckfelder weiß sind. Wie viele Türme muss man auf diesem Feld mindestens platzieren, um alle weißen Felder zu bedrohen? (Ein Feld wird von einem Turm genau dann bedroht, wenn es in der gleichen Zeile oder Spalte liegt.)

LÖSUNG. Mit 4 Türmen ist dieses nicht möglich, da jeder Turm maximal 10 weiße Felder angreift, also alle zusammen maximal 40 der 41.

Mit 5 Türmen ist es möglich (die weißen Felder sind jeweils mit einem Punkt markiert):

·	T	·		·		·		·
	·		·		·		·	
·		·	T	·		·		·
	·		·		·		·	
·		·		·	T	·		·
	·		·		·		·	
·		·		·		·	T	·
	·		·		·		·	
·	T	·		·		·		·

□

Aufgabe O.2 (4 P.)**.** Das Polynom $x^3 + px^2 + qx + r$ habe drei Nullstellen im Intervall $(0, 2)$. Zeigen Sie, dass dann die Ungleichung

$$-2 < p + q + r < 0$$

gilt.

LÖSUNG. Die Nullstellen des Polynoms seien x_0, x_1 und x_2. Aus

$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = x^3-(x_0+x_1+x_2)x^2+(x_0x_1+x_0x_2+x_1x_2)x-x_0x_1x_2$$

erhält man die Koeffizienten $p = -x_0 - x_1 - x_2$, $q = x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2$ und $r = -x_0x_1x_2$. Deren Summe $p + q + r$ beträgt

$$-x_0 - x_1 - x_2 + x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2 - x_0x_1x_2 = (x_0 - 1)(x_1 + x_2 - x_1x_2 - 1) - 1,$$

also

$$p + q + r = -(x_0 - 1)(x_1 - 1)(x_2 - 1) - 1.$$

Jeder der Faktoren $(x_0 - 1)$, $(x_1 - 1)$ und $(x_2 - 1)$ ist zwischen -1 und 1, also auch deren Produkt, womit die gewünschte Abschätzung gilt. □

Aufgabe O.3 (4 P.)**.** Eine Gerade g tangiere einen Kreis im Punkt A. Wir wählen einen Punkt B auf g. Nun rotieren wir die Strecke AB um einen beliebigen Winkel um den Kreismittelpunkt. Dabei gehen A in A' und B in B' über. Beweisen Sie, dass die Gerade durch A und A' die Strecke BB' halbiert.

LÖSUNG. Es sei C' die Spiegelung von B' an A' (siehe Abbildung 3).

Die Winkel $\angle A'AB$ und $\angle C'A'A$ sind gleich groß, da AA' Sehne und AB und $A'C'$ Tangenten sind. Außerdem sind die Strecken AB und $A'C'$ gleich lang, da $A'C'$ Spiegelung von $A'B'$ ist (welches Drehung von AB ist). Deshalb sind AA' und $C'B$ parallel.

Da AA' die Strecke $B'C'$ halbiert, halbiert AA' auch BB' nach Strahlensatz.

□

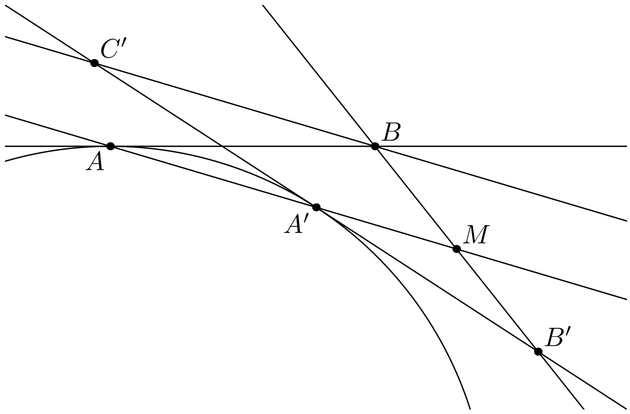

Abbildung 3: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.3.

Aufgabe O.4 (4 P.)**.** Eine 0, 1-Folge wird nach folgender Regel konstruiert. An die k-te Stelle schreibt man eine 0, falls die Quersumme von k gerade ist, sonst eine 1. Die Folge beginnt so:

$$10101010110\ldots$$

Zeigen Sie, dass diese Folge nicht periodisch sein kann. (Eine Folge heißt periodisch, falls eine positive natürliche Zahl p so existiert, dass stets zwei Folgenglieder gleich sind, sofern sich ihre Indizes um ein Vielfaches von p unterscheiden.)

Lösung. Beide Fälle, dass die minimale Periodenlänge durch 10 bzw. nicht durch 10 teilbar ist, werden zum Widerspruch geführt, weshalb es keine Periode geben kann:

Angenommen die minimale Periodenlänge p wäre nicht durch 10 teilbar. Das 9-te und 10-te Folgenglied sind beide 1, also auch das $(9+p)$-te und $(10+p)$-te. Dieses ist jedoch nicht möglich, da sich $9+p$ und $10+p$ nur in der letzten Ziffer um 1 unterscheiden, also nicht die Quersummen beider ungerade sein können.

Angenommen p wäre durch 10 teilbar. Betrachte die Teilfolge bestehend aus jedem 10-ten Folgenglied. Diese hat damit die Periodenlänge $\frac{p}{10}$. Diese Folge stimmt jedoch mit der ursprünglichen überein, da die letzte Ziffer 0 jeder Zahl, deren Quersumme betrachtet wurde, nichts verändert. Also konnte p nicht die minimale Periodenlänge sein. □

Alternative Lösung. Angenommen, es gibt eine Periodenlänge p (zum Beispiel $p = 2713$). Sei q ihre Quersumme (hier $q = 13$), n die Anzahl der Dezimalstellen (hier $n = 4$) und k ihre erste Dezimalstelle (hier $k = 2$). Wir betrachten nun die Zahlen $a = 10^n$ (hier $a = 10000$) und $b = (k-1) \cdot 10^n + (10-k) \cdot 10^{n-1}$ (hier $b = 18000$). Die Quersumme von a ist 1, die von b ist 9, also beide ungerade. Somit müssen auch die Quersummen von $a+p$ (hier $a+p = 12713$) und $b+p$ (hier $b+p = 20713$) ungerade sein. Die Quersumme von $a+p$ ist $q+1$, denn die Dezimaldarstellung von $a+p$ entspricht der von p mit einer zusätzlichen 1 an der ersten Stelle. Die Quersumme von $b+p$ ist q, denn die Dezimaldarstellung von $b+p$ entspricht der von p mit einer zusätzlichen 0 an der zweiten Stelle. Da q und $q+1$ nicht beide ungerade sein können, ergibt sich ein Widerspruch. Somit ist die Folge nicht periodisch. □

Aufgabe O.5. (a) (3 P.) Eine Pizza habe die Form eines Dreiecks, bei dem der stumpfe Winkel doppelt so groß ist wie ein anderer Winkel. Die Pizza soll nun in einen dreieckigen Karton gesteckt werden. Allerdings geht das Karton-Dreieck aus dem Pizza-Dreieck durch eine Spiegelung an einer Achse hervor. Wie kann man die Pizza so in zwei Teile zerschneiden, dass sie überschneidungsfrei und ohne Umdrehen in den Karton passen?

(b) (3 P.) Gleiches Problem wie in a, nur dass jetzt das Pizza-Dreieck die Winkel 20°, 30° und 130° hat.

Lösung. (a) Siehe Lösung zu Aufgabe M.5 b.

(b) Die Ecken des Dreiecks seien A, B und C. Weiter seien $\angle BAC = 20°$, $\angle CBA = 30°$ und $\angle ACB = 130°$ (siehe Abbildung 4).

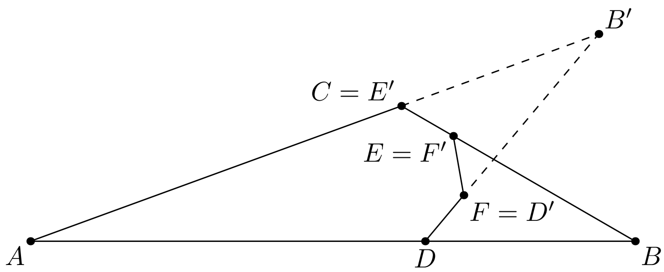

Abbildung 4: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.5 b. Das Dreieck wird entlang der Strecken DF und FE zerschnitten und das Viereck $BEFD$ nach $B'E'F'D'$ verschoben.

Man wählt D auf der Seite AB derart, dass $|AD| = |AC|$. Dann wählt man E auf der Seite BC so, dass $|BE| = |BD|$. Schließlich wählt man F derart, dass $\angle FDA = \angle CEF = 130°$. Dann ist

$$\begin{aligned}\angle EFD =& 540° - (\angle DAC + \angle FDA + \angle CEF + \angle ACE)\\ =& 540° - (20° + 3 \cdot 130°) = 130°.\end{aligned}$$

Da im Viereck $BEFD$ die Kanten BD und BE gleich lang sowie die Winkel $\angle BDF$ und $\angle FEB$ gleich groß (50°) sind, sind auch die Kanten DF und EF gleich lang. Aus Symmetriegründen im Fünfeck $ADFEC$ gilt auch $|CE| = |DF| = |EF|$.

Man kann also das Viereck $BEFD$ derart in ein Viereck $B'E'F'D'$ verschieben, dass $E' = C$, $F' = E$ und $D' = F$. Nun gilt $\angle B'FD = \angle ACB' = 180°$, deshalb füllen die beiden Teile $ADFEC$ und $B'E'F'D'$ das Dreieck $\Delta ADB'$ exakt aus. Außerdem ist $\angle AB'D = 30° = \angle CBA$ und $\angle B'DA = 130° = \angle ACB$, also geht $\Delta ADB'$ durch eine Spiegelung aus ΔABC hervor.

□

Fragen und Anmerkungen. Schicken Sie diese bitte an Prof. Dr. Helmut Müller <mueller@math.uni-hamburg.de>. An den Lösungen haben außerdem mitgewirkt: Thomas Kecker, Klaus Sielaff, Philipp Sprüssel und Jan Henrik Sylvester.