

28. Internationaler Mathematik-Städtewettbewerb, 29. März 2007

OBERSTUFE

Aufgabe 1: [3 Punkte]

Die 81 Quadrate eines 9×9 -Feldes seien abwechselnd schwarz und weiß gefärbt, wobei die Eckfelder weiß sind. Wie viele Türme muss man auf diesem Feld mindestens platzieren, um alle weißen Felder zu bedrohen? (Ein Feld wird von einem Turm genau dann bedroht, wenn es in der gleichen Zeile oder Spalte liegt.)

Aufgabe 2: [4 Punkte]

Das Polynom $x^3 + px^2 + qx + r$ habe drei Nullstellen im Intervall $(0, 2)$. Zeigen Sie, dass dann die Ungleichung

$$-2 < p + q + r < 0$$

gilt.

Aufgabe 3: [4 Punkte]

Eine Gerade g tangiere einen Kreis im Punkt A . Wir wählen einen Punkt B auf g . Nun rotieren wir die Strecke AB um einen beliebigen Winkel um den Kreismittelpunkt. Dabei gehen A in A' und B in B' über. Beweisen Sie, dass die Gerade durch A und A' die Strecke BB' halbiert.

Aufgabe 4: [4 Punkte]

Eine 0,1-Folge wird nach folgender Regel konstruiert. An die k -te Stelle schreibt man eine 0, falls die Quersumme von k gerade ist, sonst eine 1. Die Folge beginnt so:

10101010110...

Zeigen Sie, dass diese Folge nicht periodisch sein kann. (Eine Folge heißt periodisch, falls eine positive natürliche Zahl p so existiert, dass stets zwei Folgenglieder gleich sind, sofern sich ihre Indizes um ein Vielfaches von p unterscheiden.)

Aufgabe 5:

a) [3 Punkte] Eine Pizza habe die Form eines Dreiecks, bei dem der stumpfe Winkel doppelt so groß ist wie ein anderer Winkel. Die Pizza soll nun in einen dreieckigen Karton gesteckt werden. Allerdings geht das Karton-Dreieck aus dem Pizza-Dreieck durch eine Spiegelung an einer Achse hervor. Wie kann man die Pizza so in zwei Teile zerschneiden, dass sie überschneidungsfrei und ohne Umdrehen in den Karton passen?

b) [3 Punkte] Gleiches Problem wie in a), nur dass jetzt das Pizza-Dreieck die Winkel 20° , 30° und 130° hat.

Alle Aussagen und Feststellungen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen!

An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden.

Viel Erfolg !