29. Internationaler Mathematik-Städtewettbewerb, 12. November 2007

MITTELSTUFE

Aufgabe 1: [5 Punkte]

Es sei $ABCD$ eine Raute und der Punkt K liege zwischen C und D mit $|AD| = |BK|$. Ferner bezeichne F den Schnittpunkt der Diagonalen BD mit der Mittelsenkrechten auf BC. Zeige, dass die Punkte A, F und K auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 2:

a) [3 Punkte] Pete und Basil wählen jeder drei positive ganze Zahlen aus. Für je zwei seiner Zahlen schreibt Pete ihren größten gemeinsamen Teiler an die Tafel. Für je zwei seiner Zahlen schreibt Basil ihr kleinstes gemeinsames Vielfache an die gleiche Tafel. Nun stellt sich heraus, dass beide die gleichen Zahlen angeschrieben haben. Zeige, dass alle an die Tafel geschriebenen Zahlen gleich sind.

b) [3 Punkte] Ist diese Beobachtung auch dann richtig, wenn sich Pete und Basil anfangs statt drei Zahlen vier Zahlen ausgedacht haben?

Aufgabe 3: [6 Punkte]

Mike steht im Mittelpunkt eines kreisförmigen Rasens von 100 m Radius. In jeder Minute wählt er eine Richtung, in die er einen Schritt von 1 m Länge setzen will. Bevor er dies tut, kann Kate seinen Schritt in die entgegengesetzte Richtung abändern. Kann es Mike stets so einrichten, dass er den Rasen verlässt, oder kann ihn Kate daran hindern?

Aufgabe 4: [7 Punkte]

Zwei Spieler spielen auf einem Streifen der Breite 1 und der Länge N, so dass N quadratische Felder der Länge 1 entstehen, folgendes Spiel: Abwechselnd malt in ein freies Feld der eine Spieler ein Kreuz und der andere Spieler einen Kreis. Dabei dürfen aber niemals zwei Kreuze oder zwei Kreise nebeneinander gemalt werden. Der Spieler, der zuerst sein Zeichen nicht mehr malen kann, hat verloren. Welcher der beiden Spieler kann immer gewinnen, unabhängig von der Spielweise des anderen, der der anfängt oder der andere?

Aufgabe 5: [8 Punkte]

Gegeben ist eine Anzahl von Gewichten. Jedes Gewicht ist mit einem Aufkleber versehen, auf dem eine Masse notiert ist. Die Menge der Massen auf den Aufklebern stimmt mit der Menge der tatsächlichen Massen überein, allerdings können einige Aufkleber vertauscht sein. Um dies festzustellen, können die Gewichte m_j auf beiden Seiten einer Geraden im Abstand s_j von irgendeinem festen Punkt gelegt werden. Eine Wägung besteht nun darin, dass die Summe der Momente der Gewichte links und rechts verglichen werden. Unter dem Moment eines Gewichts m_j versteht man das Produkt $m_j s_j$. Kann man stets mit nur einer derartigen Wägung entscheiden, ob alle Aufkleber das richtige Gewicht anzeigen?

Aufgabe 6:

Einem Zauberer werden die Augen verbunden. Ein Zuschauer legt N gleiche Münzen in Reihe, einige davon mit der Zahl, die anderen mit dem Kopf nach oben. Nun bittet der Assistent des Zauberers den Zuschauer, eine ganze Zahl zwischen 1 und N auf ein Blatt zu schreiben und sie allen Anwesenden einschließlich dem Assistenten zu zeigen. Anschließend dreht der Assistent genau eine Münze um. Als jetzt dem Zauberer die Binde abgenommen wird, schaut er auf die Münzreihe und nennt daraufhin die aufgeschriebene Zahl.

a) [4 Punkte] Zeige, dass sich der Zauberer und sein Assistent eine Methode ausgedacht haben können, die für $N = 2a$ funktioniert, wenn sie für $N = a$ funktioniert.

b) [5 Punkte] Finde alle Werte von N, für die eine solche Methode existiert.

Aufgabe 7: [9 Punkte]

William möchte ein großer Dichter werden. Zu jedem Buchstaben des lateinischen Alphabets wählt er ein Wort aus, das diesen Buchstaben enthält. Er schreibt zunächst das Wort für A hin. Dann ersetzt er jeden Buchstaben durch das entsprechende Wort aus seiner Liste, jeweils getrennt durch eine Leerstelle. In dem sich dadurch ergebenden Text ersetzt er wiederum jeden Buchstaben durch das entsprechende Wort. Dieses Verfahren führt er 40-mal durch. Sein Text beginnt mit „*Bis jener Stern, der mich durchs Leben leitet...*“. Zeige, dass diese Phrase irgendwo in seinem Text erneut auftauchen muss.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen!

An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden. **Viel Erfolg !**

29. Internationaler Mathematik-Städtewettbewerb, 12. November 2007

OBERSTUFE

Aufgabe 1:

a) [2 Punkte] Pete und Basil wählen jeder drei positive ganze Zahlen aus. Für je zwei seiner Zahlen schreibt Pete ihren größten gemeinsamen Teiler an die Tafel. Für je zwei seiner Zahlen schreibt Basil ihr kleinstes gemeinsames Vielfache an die gleiche Tafel. Nun stellt sich heraus, dass beide die gleichen Zahlen angeschrieben haben. Zeige, dass alle an die Tafel geschriebenen Zahlen gleich sind.

b) [2 Punkte] Ist diese Beobachtung auch dann richtig, wenn sich Pete und Basil anfangs statt drei Zahlen vier Zahlen ausgedacht haben?

Aufgabe 2: [6 Punkte]

Die Diagonalen eines einem Kreis einbeschriebenen Vierecks schneiden sich in dem Punkt P. Weiter seien K, L, M, N die Mittelpunkte der Seiten des Vierecks. Zeigen Sie, dass die Umkreisradien der Dreiecke $\triangle PKL$, $\triangle PLM$, $\triangle PMN$ und $\triangle PNK$ alle gleich sind.

Aufgabe 3: [6 Punkte]

Finden Sie alle arithmetischen Progressionen, die sich zu 1 aufsummieren und die ausschließlich aus Zahlen der Form $\frac{1}{k}$ (mit einer natürlichen Zahl k) bestehen.

Aufgabe 4: [6 Punkte]

Gegeben ist eine Anzahl von Gewichten. Jedes Gewicht ist mit einem Aufkleber versehen, auf dem eine Masse notiert ist. Die Menge der Massen auf den Aufklebern stimmt mit der Menge der tatsächlichen Massen überein, allerdings können einige Aufkleber vertauscht sein. Um dies festzustellen, können die Gewichte m_j auf beiden Seiten einer Geraden im Abstand s_j von irgendeinem festen Punkt gelegt werden. Eine Wägung besteht nun darin, dass die Summe der Momente der Gewichte links und rechts verglichen werden. Unter dem Moment eines Gewichts m_j versteht man das Produkt $m_j s_j$. Kann man stets mit nur einer derartigen Wägung entscheiden, ob alle Aufkleber das richtige Gewicht anzeigen?

Aufgabe 5:

Einem Zauberer werden die Augen verbunden. Ein Zuschauer legt N gleiche Münzen in Reihe, einige davon mit der Zahl, die anderen mit dem Kopf nach oben. Nun bittet der Assistent des Zauberers den Zuschauer, eine ganze Zahl zwischen 1 und N auf ein Blatt zu schreiben und sie allen Anwesenden einschließlich dem Assistenten zu zeigen. Anschließend dreht der Assistent genau eine Münze um. Als jetzt dem Zauberer die Binde abgenommen wird, schaut er auf die Münzreihe und nennt daraufhin die aufgeschriebene Zahl.

a) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass sich der Zauberer und sein Assistent eine Methode ausgedacht haben können, die für $N = ab$ funktioniert, wenn sie für $N = a$ und für $N = b$ funktioniert.

b) [5 Punkte] Finden Sie alle Werte von N, für die eine solche Methode existiert.

Aufgabe 6: [8 Punkte]

In der Ebene seien zwei konvexe Polygone P und Q gegeben. Für jede Seite von P zeichne man zwei zu ihr parallele Geraden, so dass Q zwischen ihnen liegt. Der kleinstmögliche Abstand dieser beiden Geraden sei h und l die Länge der betrachteten Seite von P. Summieren wir die Produkte hl für jede Seite von P auf, so ergibt sich eine Zahl, die mit (P, Q) bezeichnet wird. Beweisen Sie $(P, Q) = (Q, P)$.

Aufgabe 7:

Alex sieht sich 100 verschlossenen Kästen gegenüber, wobei jeder Kasten entweder einen roten oder einen blauen Stein enthält. Sein Guthaben beträgt anfangs genau einen Euro=100 Cents. Nun wählt er einen verschlossenen Kasten, eine Farbe und einen (nicht notwendig ganzzahligen) Betrag (zum Beispiel $\frac{1}{3}$ aus seinem Guthaben). Der Kasten wird geöffnet und dabei erhöht oder erniedrigt sich Alex' Guthaben um den von ihm gewählten Betrag, je nachdem, ob er die Farbe richtig gewählt hatte oder nicht. Dieses Spiel läuft so lange, bis alle Kästen geöffnet sind. Welches ist das höchste Guthaben, das Alex unabhängig von der Verteilung der Steine erreichen kann, wenn er weiß, dass

a) [3 Punkte] es genau einen blauen Stein gibt;

b) [5 Punkte] die Anzahl der blauen Steine n, $n \in \mathbb{N}$ ist.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen!

An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden. **Viel Erfolg !**