Städtewettbewerb Herbst 2007 Lösungsvorschläge

Hamburg

12. November 2007 [Version 21. November 2007]

M Mittelstufe

Aufgabe M.1 (5 P.)**.** Es sei $ABCD$ eine Raute und der Punkt K liege zwischen C und D mit $|AD| = |BK|$. Ferner bezeichne F den Schnittpunkt der Diagonalen BD mit der Mittelsenkrechten auf BC. Zeige, dass die Punkte A, F und K auf einer Geraden liegen.

Lösung. Zeichnung siehe Abbildung 1. Der Schnittpunkt der Geraden durch A und F mit CD sei mit K' bezeichnet (welcher existiert, da AF nicht parallel zu CD sein kann, weil F sonst auf AB liegen müsste). Da F auf der Mittelsenkrechten von BC liegt, und da die Raute $ABCD$ symmetrisch bezüglich ihrer Diagonalen BD ist, liegt F auch auf der Mittelsenkrechten von AB. Da AB und CD parallel sind, entsteht mit dem Viereck $ABK'D$ ein Trapez mit gleichen Schenkeln $|AD| = |BK'|$. Daher stimmt K' mit dem Punkt K überein und A, F und K liegen auf einer Geraden.

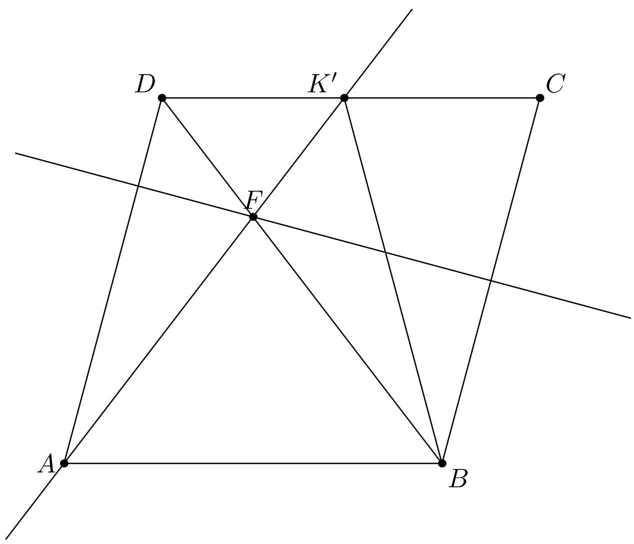

Abbildung 1: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.1.

□

Aufgabe M.2. (a) (3 P.) Pete und Basil wählen jeder drei positive ganze Zahlen aus. Für je zwei seiner Zahlen schreibt Pete ihren größten gemeinsamen Teiler an die Tafel. Für je zwei seiner Zahlen schreibt Basil ihr kleinstes gemeinsames Vielfache an die gleiche Tafel. Nun stellt sich heraus, dass beide die gleichen Zahlen angeschrieben haben. Zeige, dass alle an die Tafel geschriebenen Zahlen gleich sind.

(b) (3 P.) Ist diese Beobachtung auch dann richtig, wenn sich Pete und Basil anfangs statt drei Zahlen vier Zahlen ausgedacht haben?

LÖSUNG. (a) Pete wählt die Zahlen A_1, B_1, C_1, Basil die Zahlen A_2, B_2, C_2. Für eine beliebige Primzahl p bezeichnen a_1, b_1, c_1 bzw. a_2, b_2, c_2 die genauen Exponenten, mit denen p die Zahlen A_1, B_1, C_1 bzw. A_2, B_2, C_2 teilt (also zum Beispiel $p^{a_1} \big| A_1$, aber nicht mehr $p^{a_1+1} \big| A_1$). Ohne Beschränkung können wir, da es auf die Reihenfolge dieser Zahlen nicht ankommt, $0 \le a_1 \le b_1 \le c_1$ bzw. $0 \le a_2 \le b_2 \le c_2$ annehmen. Da in der Primfaktorzerlegung des ggT immer das Minimum bzw. im kgV das Maximum der Exponenten der beteiligten Zahlen zu nehmen ist, schreibt Pete – in irgendeiner Reihenfolge – Zahlen an die Tafel, deren p-Exponenten genau

$$\max\{a_1, b_1\},\ \max\{a_1, c_1\},\ \max\{b_1, c_1\} = b_1,\ c_1,\ c_1$$

sind, während es bei Basil genau die Zahlen

$$\min\{a_2, b_2\},\ \min\{a_2, c_2\},\ \min\{b_2, c_2\} = a_2,\ a_2,\ b_2$$

sind. Da diese Zahlenfolgen nach Voraussetzung übereinstimmen, muss

$$c_1 = b_2 \quad \text{(Vergleich der Maxima)}$$

und

$$b_1 = a_2 \quad \text{(Vergleich der Minima)}$$

gelten. Dann muss weiter $b_1 = c_1$ gelten, weil mit $b_1 < c_1$ Petes Tripel

$$b_1, c_1, c_1$$

zwei größte Zahlen enthält, aber Basils Tripel

$$b_1, b_1, c_1$$

nur eine größte Zahl. Also stimmen alle Exponenten der an die Tafel geschriebenen Zahlen überein. Da p beliebig war, müssen auch die angeschriebenen Zahlen selbst alle gleich sein. Man beachte, dass über a_1 bzw. c_2 keine Aussage gemacht wird, so dass die ursprünglichen Zahlen A_1, B_1, C_1 bzw. A_2, B_2, C_2 durchaus verschieden sein können.

(b) Bei vier Zahlen muss die Aussage in Teil a nicht gelten. Wählt zum Beispiel Pete die Zahlen $1, 2, 2, 2$ und Basil die Zahlen $1, 1, 1, 2$, so ergibt sich für die sechs ggTs

$$1, 1, 1, 2, 2, 2,$$

während Basil für die sechs kgVs

$$1, 1, 2, 1, 2, 2$$

hinschreibt. Beide schreiben zwar die gleichen Zahlen gleich oft auf, aber sie sind nicht alle gleich.

Es ist sogar möglich, dass jeder der beiden sechs verschiedene Zahlen an die Tafel schreibt, aber beide die gleichen sechs Zahlen: Pete wählt die Zahlen $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ und $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Die ggTs dieser Zahlen sind

$$6, 10, 14, 15, 21, 35.$$

Basil wählt die Zahlen 2, 3, 5 und 7 und erhält somit als kgVs ebenfalls

$$6, 10, 14, 15, 21, 35.$$

□

Aufgabe M.3 (6 P.)**.** Mike steht im Mittelpunkt eines kreisförmigen Rasens von 100 m Radius. In jeder Minute wählt er eine Richtung, in die er einen Schritt von 1 m Länge setzen will. Bevor er dies tut, kann Kate seinen Schritt in die entgegengesetzte Richtung abändern. Kann es Mike stets so einrichten, dass er den Rasen verlässt, oder kann ihn Kate daran hindern?

Lösung. Mike kann es einrichten. Er schlägt – abgesehen vom ersten Schritt – stets eine tangentiale Richtung vor, er wählt also seine Richtung stets so aus, dass sie rechtwinklig zu der Strecke zwischen ihm und dem Mittelpunkt der Rasenfläche ist. Dann ist seine Entfernung von diesem Mittelpunkt stets die gleiche, egal welche Richtung Kate verlangt.

Bezeichnet d_n Mikes Entfernung vom Mittelpunkt nach dem n-ten Schritt, so gilt $d_1 = 1$ und nach Pythagoras $d_{n+1} = \sqrt{1 + {d_n}^2}$. Also $d_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $d_3 = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$ usw. Durch Induktion zeigt man sofort $d_n = \sqrt{n}$, so dass Mike nach $n = 100^2 = 10000$ Schritten unweigerlich den Rand des Rasens erreicht (und ihn im nächsten Schritt auch verlässt). Beide benötigen dazu aber eine ungewöhnliche Kondition, denn immerhin brauchen sie 10000 Minuten $\approx$ 167 Stunden $\approx$ 7 Tage! □

Aufgabe M.4 (7 P.)**.** Zwei Spieler spielen auf einem Streifen der Breite 1 und der Länge N, so dass N quadratische Felder der Länge 1 entstehen, folgendes Spiel: Abwechselnd malt in ein freies Feld der eine Spieler ein Kreuz und der andere Spieler einen Kreis. Dabei dürfen aber niemals zwei Kreuze oder zwei Kreise nebeneinander gemalt werden. Der Spieler, der zuerst sein Zeichen nicht mehr malen kann, hat verloren. Welcher der beiden Spieler kann immer gewinnen, unabhängig von der Spielweise des anderen, der der anfängt oder der andere?

Lösung. Spieler A sei derjenige, der anfängt, Spieler B der andere.

Bei $N = 1$ gewinnt offensichtlich A. Für $N \neq 1$ gewinnt B, wenn er mit der im Folgenden beschriebenen Strategie spielt.

Unabhängig davon wie A zieht, setzt B in seinem Zug so, dass danach (wieder) für jedes maximale zusammenhängende Stück von freien Feldern folgende Bedingungen erfüllt sind: Besteht das Stück nur aus einem Feld, so kann A dort nicht hinsetzen, und kann B auf das eine Randfeld dieses Stückes nicht setzen, so darf A nicht auf das andere setzen, aber B. (Die zweite Bedingung mit anderen Worten: Ist ein freies Stück an einem Rand durch ein Symbol von B begrenzt, so wird der andere Rand von einem Symbol von A gebildet.) Diese Bedingungen sind zu Beginn des Spiels für $N \neq 1$ erfüllt.

Setzt A jetzt in ein solches freies Stück, so setzt B ebenfalls dort hinein und zwar auf ein Randfeld. Dadurch entstehen auf beiden Seiten des von A gesetzten Symbols wieder freie Stücke, die den Voraussetzungen entsprechen: Besteht eins nur aus einem Feld, so kann A nicht dort hinein setzen, da das neue Symbol von A daneben steht. Auf beiden Seiten des neuen Symbols von A kann B auf das neue Randfeld daneben setzen, A aber nicht.

Also kann B nach jedem Zug von A noch setzen und gewinnt damit.

Anmerkung: Letztendlich gewinnt B immer, wenn er in seinem ersten Zug an einen Rand des Streifens setzt. Die Spielweise beider Spieler danach ist nicht mehr entscheidend. Das kann man einsehen, indem man für jede mögliche Verteilung von Symbolen um das Feld, auf das ein Spieler setzt, Bilanz führt, wie viele Felder der Spieler sich und seinem Gegner jeweils dadurch blockiert. (Dabei sind mindestens sieben Fälle zu betrachten.) □

Aufgabe M.5 (8 P.)**.** Gegeben ist eine Anzahl von Gewichten. Jedes Gewicht ist mit einem Aufkleber versehen, auf dem eine Masse notiert ist. Die Menge der Massen auf den Aufklebern stimmt mit der Menge der tatsächlichen Massen überein, allerdings können einige Aufkleber vertauscht sein. Um dies festzustellen, können die Gewichte m_j auf beiden Seiten einer Geraden im Abstand s_j von irgendeinem festen Punkt gelegt werden. Eine Wägung besteht nun darin, dass die Summe der Momente der Gewichte links und rechts verglichen werden. Unter dem Moment eines Gewichts m_j versteht man das Produkt $m_j s_j$. Kann man stets mit nur einer derartigen Wägung entscheiden, ob alle Aufkleber das richtige Gewicht anzeigen?

Lösung. Das hier beschriebene Verfahren benutzt folgende Hilfsaussage:

Hat man eine Anzahl von Massen gegeben, $m_1 \leq \cdots \leq m_n$, und eine (eventuell kleinere) Anzahl von Positionen, in deren Abstand man die Massen auf einer Seite der Balkenwaage anhängen kann, so ist es klar, dass man das größte Gesamtmoment erzielt, wenn man das schwerste Gewicht m_n an die äußerste Position hängt, das zweitschwerste an die zweitäußerste Position usw., da man sonst immer ein Gewicht durch ein schwereres der verbleibenden Gewichte ersetzen könnte oder zwei Gewichte finden kann, die nicht in ihrer Reihenfolge aufgehängt sind, und durch deren Vertauschung man das Gesamtmoment erhöhen könnte.

Das Verfahren funktioniert jetzt folgendermaßen: Wir sortieren die Gewichte entsprechend der Größen, die auf den Aufklebern angegeben sind, diese seien $l_1 \leq \cdots \leq l_n$. Wir bringen nun alle Gewichte bis auf das vermeintlich leichteste auf der linken Seite der Balkenwaage an, und zwar so, dass l_2 im Abstand 2, l_3 im Abstand 3, …, l_n im Abstand n vom Mittelpunkt der Balkenwaage hängt. Das Gewicht mit dem Aufkleber l_1 hängen wir als einziges auf der rechten Seite der Balkenwaage in einem Abstand d an, sodass gilt

$$d \cdot l_1 = 2 \cdot l_2 + \cdots n \cdot l_n,$$

also gerade so, dass die Balkenwaage im Gleichgewicht ist, wenn alle Aufkleber die richtige Masse der Gewichte anzeigen.

Wenn wir nun annehmen, dass nicht alle Aufkleber die richtige Masse anzeigen, so kann die Balkenwaage nicht mehr im Gleichgewicht sein, denn dann liegt auf der linken Seite ein kleineres Gesamtmoment als das maximale vor, welches nach dem Hilfssatz für die gewählten Abstände genau dann erzielt wird, wenn sich die schwerste Masse im Abstand n, die zweitschwerste im Abstand $n-1$ usw. befindet, also gerade, wenn alle Aufkleber das richtige Gewicht anzeigen. Das Moment auf der rechten Seite ist in jedem Fall größer oder gleich $d \cdot l_1$.

Mit diesem Verfahren kann man also mit einer Wägung feststellen, ob alle Aufkleber auf den richtigen Gewichten angebracht sind, was genau beim Gleichgewicht der Balkenwaage gegeben ist, ansonsten schlägt die Waage nach rechts aus. □

Aufgabe M.6. Einem Zauberer werden die Augen verbunden. Ein Zuschauer legt N gleiche Münzen in Reihe, einige davon mit der Zahl, die anderen mit dem Kopf nach oben. Nun bittet der Assistent des Zauberers den Zuschauer, eine ganze Zahl zwischen 1 und N auf ein Blatt zu schreiben und sie allen Anwesenden einschließlich dem Assistenten zu zeigen. Anschließend dreht der Assistent genau eine Münze um. Als jetzt dem Zauberer die Binde abgenommen wird, schaut er auf die Münzreihe und nennt daraufhin die aufgeschriebene Zahl.

(a) (4 P.) Zeige, dass sich der Zauberer und sein Assistent eine Methode ausgedacht haben können, die für $N = 2a$ funktioniert, wenn sie für $N = a$ funktioniert.

(b) (5 P.) Finde alle Werte von N, für die eine solche Methode existiert.

Lösung. Damit eine Methode funktioniert, muss der Zauberer, sobald er die Reihe der Münzen sieht, diese Verteilung von Kopf und Zahl einer Zahl zwischen 1 und N zuordnen können. Jeder möglichen Verteilung wird also eine Zahl zugeordnet. Der Assistent muss zudem, unabhängig von der gewählten Zahl n und der Verteilung, die der Zuschauer zunächst gewählt hat, immer in der Lage sein, die Verteilung durch Umdrehen einer einzigen Münze derart zu ändern, dass die entstehende Verteilung der Zahl n zugeordnet ist. Da er nur N Verteilungen herstellen kann, muss unter den diesen Verteilungen zugeordneten Zahlen jede Zahl von 1 bis N genau einmal auftreten. Wir nennen zwei Verteilungen, die sich durch das Umdrehen einer Münze ineinander überführen lassen, *benachbart.* Das Ziel von Zauberer und Assistent ist es also, jeder Verteilung eine Zahl zuzuordnen, so dass in der Nachbarschaft einer jeden Verteilung allen N Verteilungen verschiedene Zahlen zugeordnet sind.

(a) Sei eine solche Zuordnung für $N = a$ gegeben, für eine Verteilung V von a Münzen sei $Z_a(V)$ die ihr zugeordnete Zahl zwischen 1 und a. Hieraus konstruieren wir eine Zuordnung Z_{2a} für $N = 2a$.

Jede beliebige Verteilung V von Kopf und Zahl von $2a$ Münzen unterteilt sich in die Verteilung V_1 der ersten a Münzen und die Verteilung V_2 der letzten a Münzen; wir schreiben $V = (V_1, V_2)$. Nun setzen wir zunächst $k(V) := Z_a(V_1) + Z_a(V_2)$. Falls $k(V) \leq a$, so setzen wir $n(V) := k(V)$, anderenfalls setzen wir $n(V) := k(V) - a$. In jedem Fall ist $n(V)$ eine Zahl zwischen 1 und a. Nun betrachten wir noch einmal die Verteilung V_1 der ersten a Münzen. Falls gerade viele von ihnen mit der Zahl nach oben liegen, setzen wir $Z_{2a}(V) := n(V)$, anderenfalls $Z_{2a}(V) := n(V) + a$.

Es bleibt zu zeigen, dass Z_{2a} die Bedingung erfüllt, dass alle Nachbarn einer jeden Verteilung unterschiedlichen Zahlen zugeordnet sind. Sei also eine Verteilung $V = (V_1, V_2)$ gegeben. Nehmen wir zunächst an, dass in V_1

gerade viele Münzen mit der Zahl nach oben liegen. Betrachte alle Nachbarn von V, die durch Umdrehen einer der ersten a Münzen entstehen. Dies sind genau die Verteilungen der Form $V' = (V_1', V_2)$, wobei V_1' ein Nachbar von V_1 ist. Nun sind die Werte von $Z_a(V_1')$ (für alle solchen V_1') gerade die Zahlen von 1 bis a, nach der Annahme, dass Z_a eine funktionierende Methode liefert. Demnach sind die Werte von $k(V')$ (für alle V' der obigen Form) genau die Zahlen von $Z_a(V_2) + 1$ bis $Z_a(V_2) + a$, und somit ergeben sich für $n(V')$ genau die Zahlen von 1 bis a. Für $Z_{2a}(V')$ ergeben sich daher die Zahlen von $a+1$ bis $2a$, da in V_1' ungerade viele Münzen mit der Zahl nach oben liegen, also $Z_{2a}(V') = n(V') + a$ gilt. Nun betrachte die restlichen Nachbarn von V, also solche der Form $V' = (V_1, V_2')$, wobei V_2' ein Nachbar von V_2 ist. Wie zuvor folgt auch hier, dass die Werte von $n(V')$ (für alle solchen V') genau die Zahlen von 1 bis a sind. Da in diesem Fall $Z_{2a}(V') = n(V')$ gilt, tritt jede Zahl von 1 bis $2a$ einmal als $Z_{2a}(V')$ für einen Nachbarn V' von V auf.

Liegen in V_1 ungerade viele Münzen mit der Zahl nach oben, so ergeben sich analog zum vorigen Fall für $V' = (V_1', V_2)$ die Zahlen 1 bis a als auftretende Werte von $Z_{2a}(V')$, sowie für $V' = (V_1, V_2')$ die Zahlen von $a + 1$ bis $2a$.

(b) Da es bei $N = 1$ offensichtlich eine funktionierende Methode gibt (mit Zuordnung $Z_1(V) = 1$ für jedes der beiden möglichen V), folgt aus Teil a, dass für jede Zweierpotenz eine funktionierende Methode existiert. Wir zeigen nun, dass für andere Werte von N keine Methode existiert.

Sei N so gewählt, dass es eine Methode gibt, und sei Z_N die dazugehörige Zuweisung. Insgesamt gibt es 2^N verschiedene Verteilungen der N Münzen. Wie wir bereits gesehen haben, tritt in der Nachbarschaft einer jeden Verteilung jede Zahl von 1 bis N genau einmal als Wert von Z_N auf. Jede Verteilung hat also genau einen Nachbarn, dem die Zahl 1 zugewiesen ist. Jede Verteilung V, der die 1 zugewiesen ist, hat N Nachbarn, und für jeden dieser Nachbarn ist V der einzige Nachbar, dem die 1 zugeordnet ist. Die Anzahl der Verteilungen, denen die 1 zugeordnet ist, ist daher genau $\frac{2^N}{N}$. Dies ist nur eine ganze Zahl, wenn N eine Zweierpotenz ist.

□

Aufgabe M.7 (9 P.)**.** William möchte ein großer Dichter werden. Zu jedem Buchstaben des lateinischen Alphabets wählt er ein Wort aus, das diesen Buchstaben enthält. Er schreibt zunächst das Wort für A hin. Dann ersetzt er jeden Buchstaben durch das entsprechende Wort aus seiner Liste, jeweils getrennt durch eine Leerstelle. In dem sich dadurch ergebenden Text ersetzt er wiederum jeden Buchstaben durch das entsprechende Wort. Dieses Verfahren führt er 40-mal durch. Sein Text beginnt mit „*Bis jener Stern, der mich durchs Leben leitet...*“. Zeige, dass diese Phrase irgendwo in seinem Text erneut auftauchen muss.

Lösung. Jedes Wort der genannten Phrase ist einem Buchstaben zugeordnet. Diese acht Buchstaben standen somit im 39-ten Schritt am Anfang des Textes. Sei k_{39} die Anzahl der Wörter, auf die sich diese Buchstaben verteilen. Da es keine einbuchstabigen Wörter gibt (ohnehin kann keiner dieser acht Buchstaben im Text des 39-ten Schrittes ein einbuchstabiges Wort gebildet haben, denn da dieses Wort einem Buchstaben zugeordnet ist, den es enthält, hätte sich auch im nächsten Schritt ein einbuchstabiges Wort ergeben, was unter den ersten acht Wörtern vom Text des 40-ten Schrittes nicht der Fall ist) und sich die acht Buchstaben ganz am Anfang des Textes befinden, teilen sie sich auf maximal 4 Wörter auf, also $k_{39} \leq 4$. Nun betrachten wir die ersten k_{39} Buchstaben, die im 38-ten Schritt am Anfang des Textes stehen. Sei k_{38} die Anzahl der Wörter, auf den sich diese Buchstaben im Text aufteilen. Da sie ganz am Anfang stehen (und wie zuvor keiner von ihnen ein einbuchstabiges Wort bildet), teilen sich die $k_{39} \leq 4$ Buchstaben auf höchstens 2 Wörter auf, also $k_{38} \leq 2$. Entsprechend erhalten wir $k_{37} = 1$ für die Anzahl k_{37} von Wörtern, auf die sich die ersten k_{38} Buchstaben des Textes im 37-ten Schritt aufteilen.

Die Situation ist also folgende: Aus dem ersten Buchstaben im 36-ten Schritt entsteht im 37-ten Schritt ein Wort, aus dessen ersten k_{38} Buchstaben im folgenden Schritt k_{38} Wörter entstehen, aus deren ersten k_{39} Buchstaben im folgenden (39-ten) Schritt k_{39} Wörter entstehen, aus deren ersten acht Buchstaben im 40-ten Schritt wiederum die genannte Phrase entsteht. Kommt im 36-ten Schritt der erste Buchstabe des Textes noch ein zweites Mal vor, so entsteht aus diesem Buchstaben in den vier verbleibenden Schritten ebenfalls die gewünschte Phrase.

Es ist also zu zeigen, dass im 36-ten Schritt der erste Buchstabe des Textes ein weiteres Mal auftritt. Betrachten wir also den ersten Buchstaben des Textes nach 36 Schritten und nennen wir ihn α. Nehmen wir zunächst an, dass es sich hierbei nicht um ein 'a' handelt. Der Buchstabe α ist in irgendeinem Schritt zum ersten Mal vorgekommen, was bedeutet, dass er in einem Wort vorkommt, das einem anderen Buchstaben β zugeordnet ist, der bereits einen Schritt zuvor vorhanden war. Somit tritt α genau einen Schritt nach β zum ersten Mal auf. Falls es sich bei β nicht um ein 'a' handelt, stammt auch β aus einem Wort, welches einem anderen Buchstaben zugeordnet war, der bereits einen Schritt zuvor zum ersten Mal auftauchte, und so weiter. Da wir auf diese Weise irgendwann beim 'a' angelangen und dabei jeden Buchstaben höchstens einmal betrachten, kommt β bereits nach spätestens 24 Schritten zum ersten Mal vor und α nach spätestens 25 Schritten (man beachte, dass das 'a' bereits nach 0 Schritten vorhanden ist). Sagen wir, α tritt nach k Schritten zum ersten Mal auf. Da jeder Buchstabe in dem Wort, das ihm zugeordnet ist, selbst vorkommt, tritt auch β im k-ten Schritt auf. Da α sowohl in dem ihm selbst zugeordneten Wort als auch in dem β zugeordneten Wort vorkommt, kommt α im folgenden ($k + 1$-ten) Schritt mindestens zweimal vor, ebenso in allen darauf folgenden Schritten, insbesondere im 36-ten Schritt, was wir beweisen wollten.

Handelt es sich bei α um ein 'a', so stand im vorigen Schritt kein 'a' an erster Stelle (da ansonsten in allen folgenden Schritten ein 'a' vorne stünde, was aufgrund der Voraussetzungen nach 40 Schritten nicht der Fall ist). Somit tritt α in einem Wort auf, welches einem anderen Buchstaben β zugeordnet ist, welcher nach 35 Schritten an erster Stelle steht. Da α in dem ihm selbst zugeordneten Wort enthalten ist (und, weil es sich um ein 'a' handelt, bereits ganz am Anfang vorhanden war), tritt α auch im 35-ten Schritt auf. Erneut kommt α sowohl in dem ihm selbst zugeordneten Wort als auch in dem β zugeordneten Wort vor, und somit kommt α auch in diesem Fall nach 36 Schritten mindestens zweimal vor. □

O Oberstufe

Aufgabe O.1. (a) (2 P.) Pete und Basil wählen jeder drei positive ganze Zahlen aus. Für je zwei seiner Zahlen schreibt Pete ihren größten gemeinsamen Teiler an die Tafel. Für je zwei seiner Zahlen schreibt Basil ihr kleinstes gemeinsames Vielfache an die gleiche Tafel. Nun stellt sich heraus, dass beide die gleichen Zahlen angeschrieben haben. Zeige, dass alle an die Tafel geschriebenen Zahlen gleich sind.

(b) (2 P.) Ist diese Beobachtung auch dann richtig, wenn sich Pete und Basil anfangs statt drei Zahlen vier Zahlen ausgedacht haben?

Lösung. Siehe Aufgabe M.2. □

Aufgabe O.2 (6 P.)**.** Die Diagonalen eines einem Kreis einbeschriebenen Vierecks schneiden sich in dem Punkt P. Weiter seien K, L, M, N die Mittelpunkte der Seiten des Vierecks. Zeigen Sie, dass die Umkreisradien der Dreiecke $\triangle PKL$, $\triangle PLM$, $\triangle PMN$ und $\triangle PNK$ alle gleich sind.

Lösung. Zeichnung siehe Abbildung 2. Das Viereck sei $ABCD$, der Schnittpunkt der Diagonalen AC mit NK sei Q, der Schnittpunkt von BD und KL sei R. Wir zeigen, dass $\angle KNP = \angle PLK$; dann haben $\triangle NPK$ und $\triangle KPL$ die gleichen Umkreisradien, da sie eine gemeinsame Kante besitzen (nämlich PK) und der gegenüber liegende Winkel gleich groß ist. Entsprechend sind die Umreisradien von $\triangle KPL$ und $\triangle LPM$ identisch, sowie von $\triangle LPM$ und $\triangle MPN$. Somit sind dann alle Umkreisradien identisch.

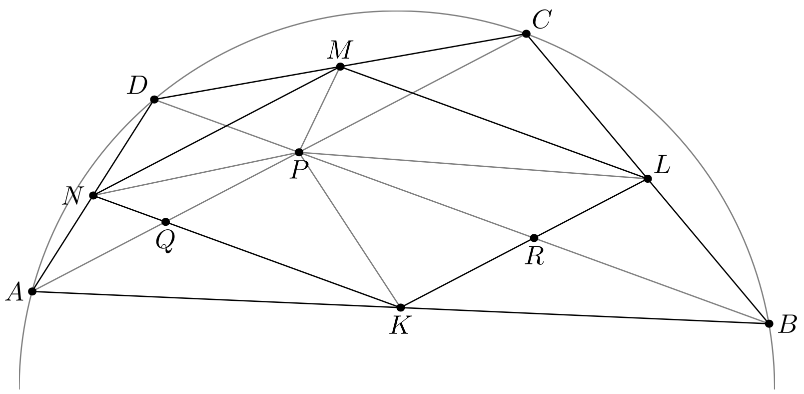

Abbildung 2: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.2.

Da K, L, M und N die Kantenmittelpunkte sind, sind die Strecken KL und NM parallel zu AC, und analog sind LM und KN parallel zu BD. Daher ist $\angle KLB = \angle ACB$ und $\angle ANK = \angle ADB$. Da AB Sehne des Umkreises ist und C und D auf dem gleichen Kreissegment zwischen A und B liegen, ist $\angle ACB = \angle ADB$ und somit

$$\angle ANK = \angle ADB = \angle ACB = \angle KLB. \tag{1}$$

Entsprechend gilt auch:

$$\angle BKL = \angle BAC = \angle BDC = \angle LMC \tag{2}$$
$$\angle CLM = \angle CBD = \angle CAD = \angle MND \tag{3}$$
$$\angle DMN = \angle DCA = \angle DBA = \angle NKA \tag{4}$$

Wegen (2) und (4) gilt $\angle AQK = \angle KRB$ und somit

$$\angle PQN = \angle LRP.$$

Um $\angle KNP = \angle PLK$ zu zeigen, genügt es $\angle NPQ = \angle RPL$ zu zeigen; dann ist $\angle QNP = \angle PLR$ aufgrund der Winkelsumme in den Dreiecken $\triangle PNQ$ und $\triangle PRL$, und es folgt $\angle KNP = \angle QNP = \angle PLR = \angle PLK$.

Nun sind die Dreiecke $\triangle APD$ und $\triangle BCP$ ähnlich, denn es gilt $\angle PAD = \angle CAD = \angle CBD = \angle CBP$ wegen (3) und $\angle ADP = \angle ADB = \angle ACB = \angle PCB$ wegen (1) (zudem sind $\angle DPA$ und $\angle BPC$ Scheitelwinkel und daher gleich groß). Da L und N die Mittelpunkte derjenigen Seiten dieser Dreiecke sind, die P gegenüber liegen, ist $\angle NPA = \angle BPL$ und somit $\angle NPQ = \angle RPL$, wie gewünscht. □

Aufgabe O.3 (6 P.)**.** Finden Sie alle arithmetischen Progressionen, die sich zu 1 aufsummieren und die ausschließlich aus Zahlen der Form $\frac{1}{k}$ (mit einer natürlichen Zahl k) bestehen.

Lösung. Neben den trivialen Progressionen mit dieser Eigenschaft – k-mal $\frac{1}{k}$ – erfüllt nur noch $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ die Voraussetzungen.

Zum Beweis, dass keine weiteren Progressionen die geforderten Eigenschaften erfüllen, nehmen wir an, $a_1, \ldots, a_n$ sei eine andere arithmetische Progression (insbesondere gilt $n > 1$) mit den geforderten Eigenschaften. Nehmen wir zunächst an, n sei ungerade. Dann gilt $a_{\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{n}$. Betrachten wir nun die $\frac{n+1}{2}$ Glieder $a_{\frac{n+1}{2}}, \ldots, a_n$. Diese sind alle unterschiedlich, und sie nehmen alle einen der $n-1$ Werte $\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{2}$ an, dies sind weniger als das Doppelte der Anzahl der betrachteten Glieder. Daher gibt es ein j zwischen $\frac{n+1}{2}$ und $n-1$ sowie eine positive ganze Zahl m mit $a_j = \frac{1}{m}$ und $a_{j+1} = \frac{1}{m-1}$. Ist $j < n-1$, so ist $a_{j+2} = \frac{1}{m-1} + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right)$. Dies ist allerdings nicht von der Form $\frac{1}{k}$, Widerspruch. Also nehmen keine zwei aufeinander folgende Glieder a_j, a_{j+1} mit $j < n-1$ „aufeinander folgende“ Werte $\frac{1}{m}$ und $\frac{1}{m-1}$ an. Hieraus folgt unmittelbar $a_n = \frac{1}{2}$ und $a_{n-1} = \frac{1}{3}$. Da es sich um eine arithmetische Progression handelt, ergibt sich $a_{n-2} = \frac{1}{6}$ und wir erhalten die anfangs genannte Progression.

Ist n gerade, so ist jedes der $\frac{n}{2}$ Glieder $a_{\frac{n+2}{2}}, \ldots, a_n$ größer als $\frac{1}{n}$. Sie nehmen daher alle einen der $n-2$ Werte $\frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{2}$ an. Dies ist nur möglich, wenn es wie zuvor ein j und ein m gibt mit $a_j = \frac{1}{m}$ und $a_{j+1} = \frac{1}{m-1}$. Erneut ergibt sich im Fall $j < n-1$ ein Widerspruch, und im Fall $j = n-1$ ergibt sich die Progression $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ (und damit ein Widerspruch zu n gerade). □

Aufgabe O.4 (6 P.)**.** Gegeben ist eine Anzahl von Gewichten. Jedes Gewicht ist mit einem Aufkleber versehen, auf dem eine Masse notiert ist. Die Menge der Massen auf den Aufklebern stimmt mit der Menge der tatsächlichen Massen überein, allerdings können einige Aufkleber vertauscht sein. Um dies festzustellen, können die Gewichte m_j auf beiden Seiten einer Geraden im Abstand s_j

von irgendeinem festen Punkt gelegt werden. Eine Wägung besteht nun darin, dass die Summe der Momente der Gewichte links und rechts verglichen werden. Unter dem Moment eines Gewichts m_j versteht man das Produkt $m_j s_j$. Kann man stets mit nur einer derartigen Wägung entscheiden, ob alle Aufkleber das richtige Gewicht anzeigen?

LÖSUNG. Siehe Aufgabe M.5 □

Aufgabe O.5. Einem Zauberer werden die Augen verbunden. Ein Zuschauer legt N gleiche Münzen in Reihe, einige davon mit der Zahl, die anderen mit dem Kopf nach oben. Nun bittet der Assistent des Zauberers den Zuschauer, eine ganze Zahl zwischen 1 und N auf ein Blatt zu schreiben und sie allen Anwesenden einschließlich dem Assistenten zu zeigen. Anschließend dreht der Assistent genau eine Münze um. Als jetzt dem Zauberer die Binde abgenommen wird, schaut er auf die Münzreihe und nennt daraufhin die aufgeschriebene Zahl.

(a) (4 P.) Zeigen Sie, dass sich der Zauberer und sein Assistent eine Methode ausgedacht haben können, die für $N = ab$ funktioniert, wenn sie für $N = a$ und für $N = b$ funktioniert.

(b) (5 P.) Finden Sie alle Werte von N, für die eine solche Methode existiert.

LÖSUNG. (a) Folgt aus Aufgabe M.6 Teil b, da Zauberer und Assistent genau dann eine Methode haben, wenn N eine Zweierpotenz ist.

(b) Siehe Aufgabe M.6 Teil b.

□

Aufgabe O.6 (8 P.)**.** In der Ebene seien zwei konvexe Polygone P und Q gegeben. Für jede Seite von P zeichne man zwei zu ihr parallele Geraden, so dass Q zwischen ihnen liegt. Der kleinstmögliche Abstand dieser beiden Geraden sei h und l die Länge der betrachteten Seite von P. Summieren wir die Produkte hl für jede Seite von P auf, so ergibt sich eine Zahl, die mit (P, Q) bezeichnet wird. Beweisen Sie $(P, Q) = (Q, P)$.

LÖSUNG. Sei $E(P)$ die Menge der Kanten von P und $E(Q)$ die Menge der Kanten von Q. Für jede Kante e von P oder Q sei $\ell(e)$ ihre Länge und $h(e)$ der minimale Abstand der zu e parallelen Geraden, wie in der Aufgabenstellung beschrieben. Analog zu (P, Q) definieren wir nun (e, f) für $e, f \in E(P) \cup E(Q)$: Sei $h(e, f)$ der minimale Abstand, den zu e parallele Geraden haben können, die f zwischen sich haben. Dann setzen wir $(e, f) := \ell(e) \cdot h(e, f)$.

Nun gilt $(e, f) = (f, e)$: Bezeichnet α den Winkel zwischen den Geraden entlang e und f (falls sich diese Geraden nicht schneiden, sind e und f parallel, und wir setzen $\alpha := 0$), so gilt $h(e, f) = \ell(f) \cdot \sin\alpha$, also

$$(e, f) = \ell(e) \cdot \ell(f) \cdot \sin\alpha = (f, e).$$

Nun behaupten wir, dass $h(e) = \frac{1}{2}\sum_{f \in E(Q)} h(e, f)$ gilt für jedes $e \in E(P)$ (und entsprechend $h(e) = \frac{1}{2}\sum_{f \in E(P)} h(e, f)$ für jedes $e \in E(Q)$). Dies folgt daraus, dass P und Q konvex sind: Gegeben ein $e \in E(P)$, seien g, g' zwei zu e parallele Geraden im Abstand $h(e)$, so dass Q zwischen ihnen liegt. Dann gibt es eine Ecke x von Q, die auf g liegt, und eine Ecke y, die auf g' liegt. Diese beiden Ecken unterteilen den Rand von Q in zwei Segmente. Seien $x =$

$x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ die Ecken eines dieser beiden Segmente in dieser Reihenfolge, also für jedes i zwischen 0 und $n-1$ gibt es eine Kante f_i von x_i nach x_{i+1}. Ferner sei h_i der Abstand von x_i zu g (also $h_0 = 0$ und $h_n = h(e)$). Offensichtlich ist $h(e, f_i) = |h_{i+1} - h_i|$. Da Q konvex ist, gilt $h_0 \leq h_1 \leq \cdots \leq h_n$, und somit $h(e, f_i) = h_{i+1} - h_i$. Hiermit folgt

$$\sum_{i=0}^{n-1} h(e, f_i) = (h_n - h_{n-1}) + (h_{n-1} - h_{n-2}) + \cdots + (h_1 - h_0) = h_n - h_0 = h(e).$$

Da für das zweite Segment von Q das Gleiche gilt, haben wir also $h(e) = \frac{1}{2} \sum_{f \in E(Q)} h(e, f)$. Entsprechend gilt auch $h(e) = \frac{1}{2} \sum_{f \in E(P)} h(e, f)$ für jedes $e \in E(Q)$.

Somit gilt

$$\begin{aligned}
(P, Q) = &\sum_{e \in E(P)} \ell(e) \cdot h(e) = \frac{1}{2} \sum_{e \in E(P)} \ell(e) \sum_{f \in E(Q)} h(e, f) \\
= &\frac{1}{2} \sum_{e \in E(P)} \sum_{f \in E(Q)} \ell(e) \cdot h(e, f) = \frac{1}{2} \sum_{e \in E(P)} \sum_{f \in E(Q)} (e, f) \\
= &\frac{1}{2} \sum_{f \in E(Q)} \sum_{e \in E(P)} (e, f) = \frac{1}{2} \sum_{f \in E(Q)} \sum_{e \in E(P)} (f, e) \\
= &(Q, P).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe O.7. Alex sieht sich 100 verschlossenen Kästen gegenüber, wobei jeder Kasten entweder einen roten oder einen blauen Stein enthält. Sein Guthaben beträgt anfangs genau einen Euro=100 Cents. Nun wählt er einen verschlossenen Kasten, eine Farbe und einen (nicht notwendig ganzzahligen) Betrag (zum Beispiel $\frac{1}{3}$ aus seinem Guthaben). Der Kasten wird geöffnet und dabei erhöht oder erniedrigt sich Alex' Guthaben um den von ihm gewählten Betrag, je nachdem, ob er die Farbe richtig gewählt hatte oder nicht. Dieses Spiel läuft so lange, bis alle Kästen geöffnet sind. Welches ist das höchste Guthaben, das Alex unabhängig von der Verteilung der Steine erreichen kann, wenn er weiß, dass

(a) (3 P.) es genau einen blauen Stein gibt;

(b) (5 P.) die Anzahl der blauen Steine n, $n \in \mathbb{N}$ ist.

Lösung. (a) Alex kann garantieren, dass er am Ende $\frac{2^{100}}{100}$ (mehr als 12,5 Quadrilliarden) Euro besitzt. Dies folgt unmittelbar aus der allgemeinen Formel aus Teil b.

(b) Alex kann stets ein Guthaben von $\frac{2^{100} n!(100-n)!}{100!}$ erreichen. (Dies ist ein Wert zwischen ca. 12,5 Euro – für $n = 50$ – und ca. 125 Quadrilliarden Euro – für $n = 0$ und $n = 100$.) Die Strategie hierzu sieht folgendermaßen aus: Im k-ten Schritt (also vor dem Öffnen des k-ten Kastens) berechnet er aus den bisher gesehenen Steinen die Anzahl $B(k)$ der noch verbleibenden blauen Steine sowie die Anzahl $R(k)$ der noch verbleibenden roten Steine. Dann rechnet er $w(k) := \frac{R(k)-B(k)}{R(k)+B(k)}$ und setzt das $w(k)$-fache seines aktuellen Guthabens darauf, dass der nächste Stein rot ist. (Falls $B(k) > R(k)$, so ist $w(k) < 0$. Wir interpretieren das Setzen eines negativen Betrages auf Rot als das Setzen des Betrages dieses Wertes auf Blau.) Ist der nächste Stein nun rot, so verändert sich sein Guthaben um den Faktor $1 + w(k) = \frac{2R(k)}{R(k)+B(k)}$. Ist der nächste Stein blau, so verändert sich sein Guthaben um den Faktor $1-w(k) = \frac{2B(k)}{R(k)+B(k)}$. Bezeichnen wir die Menge der k, für die der k-te Stein blau ist, mit $\mathcal{B}$, sowie die Menge der k, für die der k-te Stein rot ist, mit $\mathcal{R}$, so beträgt sein endgültiges Guthaben also

$$G = \prod_{k\in\mathcal{R}} \frac{2R(k)}{R(k) + B(k)} \cdot \prod_{k\in\mathcal{B}} \frac{2B(k)}{R(k) + B(k)}.$$

Nun ist stets $R(k) + B(k) = 100 - (k - 1)$, also

$$G = \frac{2^{100}}{100!} \cdot \prod_{k\in\mathcal{R}} R(k) \cdot \prod_{k\in\mathcal{B}} B(k).$$

Für das kleinste $k \in \mathcal{R}$ ist $R(k) = 100 - n$, für das nächste $k \in \mathcal{R}$ ist $R(k) = 99 - n$, da ein roter Stein weniger verbleibt, usw., es ist also $\prod_{k\in\mathcal{R}} R(k) = (100-n)!$. Entsprechend ist $B(k) = n$ für das kleinste $k \in \mathcal{B}$, sowie $B(k) = n - 1$ für das nächste $k \in \mathcal{B}$ usw., also $\prod_{k\in\mathcal{B}} B(k) = n!$. Demnach ergibt sich $G = \frac{2^{100} n!(100-n)!}{100!}$, unabhängig von der Verteilung der Steine.

Es bleibt zu zeigen, dass diese Strategie optimal ist. Nehmen wir hierzu an, es gebe bessere Strategie als die beschriebene. Da die oben beschriebene Strategie für jede Verteilung von n blauen und $100 - n$ roten Steinen das gleiche Guthaben am Ende des Vorgehens liefert, müsste eine bessere Strategie für jede Verteilung der Steine ein höheres Guthaben liefern. Wir zeigen, dass dies nicht möglich ist.

Die oben beschriebene Strategie sei mit S_{100} bezeichnet, die entsprechende Strategie für N Boxen sei S_N. Wir zeigen per Induktion nach N, dass S_N für jedes N und jede Anzahl n von blauen Steinen optimal ist. S_1 ist offensichtlich optimal, da man ein Guthaben von 2 Euro erreicht. Sei nun $N > 1$ und S_k optimal für alle $k < N$, und sei T eine bessere Strategie als S_N. Setzt T im ersten Schritt einen anderen Wert als S_N, so hat Alex in einem der beiden möglichen Fälle (er setzt auf die richtige Farbe oder nicht – falls dies nicht möglich ist, es also nur noch rote oder nur noch blaue Steine gibt, ist S_N ohnehin optimal) mit der Strategie T weniger Guthaben als mit S_N. Da S_{N-1} aber optimal ist (und die letzten $N - 1$ Schritte von S_N mit S_{N-1} übereinstimmen), ist auch das endgültige Guthaben geringer als bei S_N. Daher stimmen T und S_N im ersten Schritt überein. Das gleiche Argument für die Schritte $2, 3, \ldots$ zeigt, dass T und S_N auch für die folgenden Schritte übereinstimmen, also ist T nicht besser als S_N.

□

Fragen und Anmerkungen. Schicken Sie diese bitte an Prof. Dr. Helmut Müller <mueller@math.uni-hamburg.de>. An den Lösungen haben außerdem mitgewirkt: Thomas Kecker, Torben Schiffner, Klaus Sielaff, Philipp Sprüssel und Jan Henrik Sylvester.