

29. Internationaler Mathematik-Städtewettbewerb, 5. März 2008

MITTELSTUFE

Aufgabe 1: [3 Punkte]

Die gegenüberliegenden Seiten eines konvexen Sechsecks $ABCDEF$ seien jeweils parallel (also $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ und $CD \parallel FA$). Außerdem sei $|AB| = |DE|$. Beweise, dass $|BC| = |EF|$ und $|CD| = |FA|$.

Aufgabe 2: [5 Punkte]

In der Ebene seien zehn gleich lange Strecken gegeben. Jeder ihrer Schnittpunkte teile alle Strecken, auf denen er liegt, im Verhältnis 3 zu 4. Ermittle die maximal mögliche Anzahl an Schnittpunkten.

Aufgabe 3: [5 Punkte]

Auf 30 Karten stehen Zahlen in folgender Weise: Auf zehn Karten steht a , auf weiteren zehn Karten b und auf den restlichen zehn c (mit paarweise verschieden reellen Zahlen a, b, c). Es ist bekannt, dass zu fünf beliebigen Karten stets fünf andere existieren, so dass die Summe der Zahlen auf diesen zehn Karten null ergibt. Beweise, dass eine der Zahlen a, b und c null sein muss.

Aufgabe 4: [6 Punkte]

Ermittle alle natürlichen Zahlen n , für die $(n+1)!$ ein Vielfaches der Summe $1! + \dots + n!$ ist. (Mit $k!$ wird das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis k bezeichnet.)

Aufgabe 5:

Die 1×1 -Quadrate eines 10×10 Spielbretts seien rot, blau und weiß gefärbt, wobei zwei Quadrate verschiedene Farben haben, wenn sie eine gemeinsame Seite haben. Die Anzahl der roten Quadrate betrage 20.

a) [2 Punkte] Beweise, dass man 30 Rechtecke so ausschneiden kann, dass jedes von ihnen genau aus einem weißen und einem blauen Quadrat besteht.

b) [2 Punkte] Gib ein Beispiel einer Färbung an, bei der man 40 derartige Rechtecke ausschneiden kann (und erkläre, dass das Beispiel diese Eigenschaft hat).

b) [2 Punkte] Gib ein Beispiel an einer Färbung an, bei der es nicht möglich ist, mehr als 30 solche Rechtecke auszuschneiden (und erkläre, dass das Beispiel diese Eigenschaft hat).

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen!

An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden.

Viel Erfolg !

29. Internationaler Mathematik-Städtewettbewerb, 5. März 2008

OBERSTUFE

Aufgabe 1: [4 Punkte]

Auf 30 Karten stehen Zahlen in folgender Weise: Auf zehn Karten steht a , auf weiteren zehn Karten b und auf den restlichen zehn c (mit paarweise verschieden reellen Zahlen a, b, c). Es ist bekannt, dass zu fünf beliebigen Karten stets fünf andere existieren, so dass die Summe der Zahlen auf diesen zehn Karten null ergibt. Beweise, dass eine der Zahlen a, b und c null sein muss.

Aufgabe 2: [5 Punkte]

Gibt es natürliche Zahlen n und m , für die das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $1, 2, \dots, n$ genau 2008 mal so groß ist wie das der Zahlen $1, 2, \dots, m$?

Aufgabe 3: [5 Punkte]

Im Dreieck $\triangle ABC$ sei bei A ein rechter Winkel, M der Mittelpunkt der Seite BC und H der Fußpunkt der Höhe auf BC . Die Senkrechte zu AC durch M schneide den Umkreis des Dreiecks $\triangle AMC$ zweimal, einmal in M und einmal im Punkt P . Beweise, dass die Strecke BP die Strecke AH halbiert.

Aufgabe 4: [5 Punkte]

Gegeben seien ein konvexes Polygon und ein Quadrat. Liegen zwei Kopien des Polygons im Quadrat, so gibt es immer einen Punkt, der in beiden liegt. Beweise, dass es bei jeder Anordnung dreier Kopien des Polygons im Quadrat immer einen Punkt gibt, der in allen dreien liegt.

Aufgabe 5: [6 Punkte]

Gegeben sei die Tabelle rechts. Erlaubte Operationen seien das Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten. Wie viele verschiedene Tabellen kann man aus der vorgegebenen Tabelle durch beliebig häufiges Anwenden dieser Operationen erhalten?

1	2	3	4	5	6	7
7	1	2	3	4	5	6
6	7	1	2	3	4	5
5	6	7	1	2	3	4
4	5	6	7	1	2	3
3	4	5	6	7	1	2
2	3	4	5	6	7	1

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen!

An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden.

Viel Erfolg !