29. Internationaler Mathematik-Städtewettbewerb, 5. März 2008

OBERSTUFE

Aufgabe 1: [4 Punkte]

Auf 30 Karten stehen Zahlen in folgender Weise: Auf zehn Karten steht a, auf weiteren zehn Karten b und auf den restlichen zehn c (mit paarweise verschieden reellen Zahlen a, b, c). Es ist bekannt, dass zu fünf beliebigen Karten stets fünf andere existieren, so dass die Summe der Zahlen auf diesen zehn Karten null ergibt. Beweise, dass eine der Zahlen a, b und c null sein muss.

Aufgabe 2: [5 Punkte]

Gibt es natürliche Zahlen n und m, für die das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ genau 2008 mal so groß ist wie das der Zahlen $1, 2, \ldots, m$?

Aufgabe 3: [5 Punkte]

Im Dreieck ΔABC sei bei A ein rechter Winkel, M der Mittelpunkt der Seite BC und H der Fußpunkt der Höhe auf BC. Die Senkrechte zu AC durch M schneide den Umkreis des Dreiecks ΔAMC zweimal, einmal in M und einmal im Punkt P. Beweise, dass die Strecke BP die Strecke AH halbiert.

Aufgabe 4: [5 Punkte]

Gegeben seien ein konvexes Polygon und ein Quadrat. Liegen zwei Kopien des Polygons im Quadrat, so gibt es immer einen Punkt, der in beiden liegt. Beweise, dass es bei jeder Anordnung dreier Kopien des Polygons im Quadrat immer einen Punkt gibt, der in allen dreien liegt.

Aufgabe 5: [6 Punkte]

Gegeben sei die Tabelle rechts. Erlaubte Operationen seien das Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten. Wie viele verschiedene Tabellen kann man aus der vorgegebenen Tabelle durch beliebig häufiges Anwenden dieser Operationen erhalten?

1	2	3	4	5	6	7
7	1	2	3	4	5	6
6	7	1	2	3	4	5
5	6	7	1	2	3	4
4	5	6	7	1	2	3
3	4	5	6	7	1	2
2	3	4	5	6	7	1

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen!

An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden. **Viel Erfolg !**