Städtewettbewerb Herbst 2008 Lösungsvorschläge

Hamburg

10. November 2008 [Version 17. Dezember 2008]

M Mittelstufe

Aufgabe M.1 (4 P.). Auf einem 100×100-Schachbrett sind 100 Damen so platziert, dass keine eine andere bedroht. Beweise, dass in jedem der vier 50×50-Teile des Bretts, die in den Ecken liegen, mindestens eine Dame ist. (Bemerkung: Eine Dame bedroht eine andere, wenn sie in derselben Zeile, Spalte oder auf derselben Diagonalen steht.)

Lösung. In jeder Zeile und jeder Spalte muss sich genau eine Dame befinden, da sich sonst zwei in einer gemeinsamen Zeile oder Spalte bedrohen.

Angenommen es befände sich keine Dame im Viertel oben-links. Da in jeder der oberen 50 Zeilen eine Dame sein muss, müssen 50 Damen im Viertel oben-rechts aufgestellt sein. Durch Betrachtung der Spalten erhält man Analoges für das Viertel unten-links.

Von den 199 von unten-links nach oben-rechts verlaufenden Diagonalen des Schachbretts treffen dieselben 99 die Viertel oben-rechts und unten-links. Da keine zwei Damen auf derselben Diagonalen stehen können, können nicht 100 Damen in diesen beiden Vierteln zusammen platziert sein.

Also muss sich im Viertel oben-links eine Dame befinden und analog auch in allen anderen Vierteln. □

Aufgabe M.2 (6 P.). Von vier Steinen ist bekannt, dass ihr Gewicht in Gramm ganzzahlig ist. Eine Waage zeigt die Differenz der Gewichte auf der linken und rechten Seite an. Kann man mit vier Wägungen das Gewicht aller Steine herausfinden, wenn die Waage dabei höchstens einmal einen Fehler von einem Gramm macht?

Lösung. Man kann mit vier Wägungen das Gewicht aller vier Steine ermitteln, auch wenn die Waage dabei einmal einen Fehler von einem Gramm machen kann. Ein Verfahren wird hier angegeben.

Zunächst lege man alle Gewichte auf eine Seite und keins auf die andere. Bei den nächsten drei Wägungen lege man jeweils zwei Gewichte auf eine Seite und die anderen beiden auf die andere. Sind A, B, C und D die vier Gewichte und S, X, Y und Z die Ergebnisse der Wägungen, so können die Bezeichnungen so gewählt sein, dass

$$\begin{aligned} S &= A + B + C + D \pm 1 \\ X &= A + B - C - D \pm 1 \\ Y &= A - B + C - D \pm 1 \\ Z &= A - B - C + D \pm 1 \end{aligned}$$

gilt, wobei ± 1 bei höchstens einer Gleichung auftaucht. Addiert man alle vier Gleichungen bzw. addiert man zwei und subtrahiert zwei, kann man folgende Gleichungen erhalten

$$\begin{aligned} 4 \cdot A \pm 1 &= S + X + Y + Z \\ 4 \cdot B \pm 1 &= S + X - Y - Z \\ 4 \cdot C \pm 1 &= S - X + Y - Z \\ 4 \cdot D \pm 1 &= S - X - Y + Z. \end{aligned}$$

Betrachtet man die rechten Seiten dieser Gleichungen, kann man ablesen, ob und bei welcher der Wägungen ein Fehler aufgetreten ist:

Genau dann, wenn kein Fehler aufgetreten ist, sind alle vier rechten Seiten durch 4 teilbar. Bei einem Fehler weichen alle vier rechten Seiten um 1 von einer durch 4 teilbaren Zahl ab.

Man kann die Gewichte A, B, C und D daher ablesen, indem man die vier Gleichungen durch 4 teilt und gegebenenfalls auf eine ganze Zahl rundet. □

Aufgabe M.3 (6 P.)**.** Serge teilt Elias die Länge der Seitenhalbierenden AD und der Seite AC eines Dreiecks ΔABC mit. Mit diesen Angaben kann Elias beweisen, dass $\angle BAC$ stumpf ist und $\angle BAD$ spitz. Bestimme das Verhältnis $\frac{|AD|}{|AC|}$ (und zeige Elias' Behauptung für jedes Dreieck mit diesem Verhältnis).

Lösung. Es ist $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{1}{2}$.

Um dies zu beweisen, zeigen wir, dass es für jeden Wert $a \neq \frac{1}{2}$ ein Dreieck ΔABC mit $\frac{|AD|}{|AC|} = a$ gibt, welches nicht Elias' Behauptung genügt, dass $\angle BAC$ stumpf und $\angle BAD$ spitz ist. In diesem Fall hätte Elias seine Behauptung für ein solches a nicht beweisen können.

Sei zunächst $a > \frac{1}{2}$. In diesem Fall sei ΔABC ein Dreieck mit rechtem Winkel bei A und $|BC| = 2a\,|AC|$, siehe auch Abbildung 1. Solch ein Dreieck existiert,

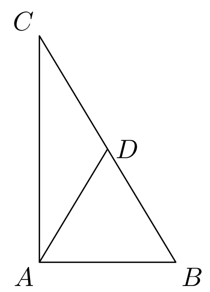

Abbildung 1: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.3.

da $2a$ nach Annahme größer als 1 ist und somit $|BC| > |AC|$ gilt. Da bei rechtwinkligen Dreiecken bekanntermaßen der Mittelpunkt D der Hypotenuse BC der Mittelpunkt des Umkreises ist, gilt

$$|AD| = |BD| = \frac{1}{2}\,|BC| = a\,|AC|$$

und somit $\frac{|AD|}{|AC|} = a$, wie gewünscht. Da bei A aber ein rechter Winkel ist, ist $\angle BAC$ nicht stumpf.

Sei nun $a < \frac{1}{2}$. In diesem Fall konstruieren wir das Dreieck ΔABC, indem wir die Punkte A, C und D vorgeben und B als Punktspiegelung von C an D definieren (was garantiert, dass D der Mittelpunkt von BC ist). Zeichnung siehe Abbildung 2. Zunächst wählen wir A und C beliebig. Egal wie wir D nun

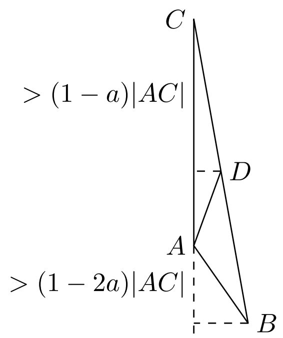

Abbildung 2: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.3.

wählen, hat der Fußpunkt des Lotes von D auf die Gerade durch A und C einen Abstand zu C von mehr als $(1-a)\,|AC|$. Dementsprechend hat der Fußpunkt des Lotes von B auf die Gerade durch A und C in jedem Fall einen Abstand zu C von mehr als $(2-2a)\,|AC|$ und daher einen Abstand zu A von mehr als $(1-2a)\,|AC|$. Somit gilt auch $|AB| > (1-2a)\,|AC| > 0$. Da wir jedoch den Abstand von D – und somit auch von B – zur Geraden durch A und C beliebig klein wählen können, indem wir $\angle DAC$ klein wählen, lässt sich der Winkel $\angle BAC$ beliebig nah an $180°$ annähern. Wählen wir also $\angle DAC$ so klein, dass sowohl $\angle DAC < 45°$ als auch $\angle BAC > 135°$ gilt, folgt $\angle BAD > 90°$, also ist dieser Winkel nicht spitz.

Es bleibt zu beweisen, dass Elias' Behauptung für jedes Dreieck ΔABC mit $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{1}{2}$ zutrifft. Sei E der Mittelpunkt von AC (siehe auch Abbildung 3). Nach

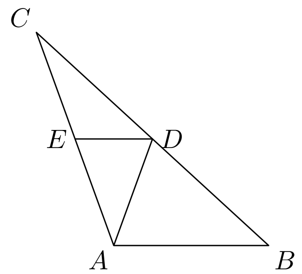

Abbildung 3: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.3.

dem Strahlensatz sind AB und ED parallel, es gilt daher $\angle EDA = \angle BAD$. Zudem ist nach Annahme $|AD| = \frac{1}{2}\,|AC| = |AE|$. Also ist ΔADE gleichschenklig und somit $\angle AED = \angle EDA$. Hieraus folgt

$$180° = \angle DAE + \angle AED + \angle EDA = \angle DAE + 2\angle BAD$$

und somit $\angle BAD < 90°$. Außerdem ist

$$\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC = \angle BAD + \angle DAE = 180° - \angle BAD$$

und somit $\angle BAC > 90°$. Also ist $\angle BAC$ stumpf und $\angle BAD$ spitz, wie gewünscht. □

Aufgabe M.4 (6 P.)**.** Baron Münchhausen behauptet, dass er eine Karte des Landes Oz besitzt, die folgende Eigenschaften hat: Es gibt fünf Städte und jeweils zwei von ihnen sind durch eine Straße verbunden, die nicht durch andere Städte verläuft. Jede dieser Straßen schneidet höchstens eine andere Straße (und nicht mehrfach). Die Straßen auf der Karte sind entweder gelb oder rot. Wenn man nun um eine Stadt (entlang ihrer Grenze) herum geht, wechseln sich die Farben der überquerten Straßen ab. Kann diese Behauptung wahr sein?

LÖSUNG. Die Behauptung von Baron Münchhausen kann wahr sein. Eine mögliche Anordnung ist in Abbildung 4 gezeigt. □

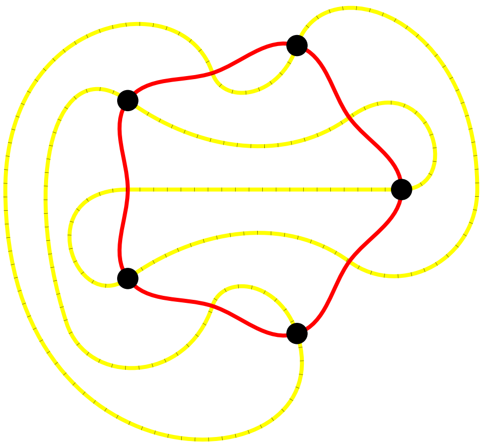

Abbildung 4: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.4.

Aufgabe M.5 (8 P.)**.** Es seinen $a_1, \dots, a_n$ positive Zahlen mit $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \frac{1}{2}$. Beweise $(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \dots \cdot (1 + a_n) < 2$.

LÖSUNG. Wenn man das Produkt $(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\dots\cdot(1+a_n)$ ausmultipliziert, so ergibt sich eine Summe

$$1 + (a_1 + \dots + a_n) + (a_1a_2 + a_1a_3 + \dots + a_{n-1}a_n) + \dots + a_1a_2 \cdots a_n.$$

Hierbei haben wir die einzelnen Summanden nach der Anzahl der Faktoren a_i sortiert. Bezeichnen wir mit S_k die Summe all derer Summanden, die aus genau k Faktoren bestehen ($k = 1, 2, \dots, n$), so ergibt sich die Summe $1 + S_1 + S_2 + \dots + S_n$. Wir behaupten nun, dass $S_k \leq \frac{1}{2^k}$ gilt für jedes $k = 1, 2, \dots, n$. Hieraus folgt dann offensichtlich

$$(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \dots \cdot (1 + a_n) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} < 2.$$

Wir beweisen, dass $S_k \leq \frac{1}{2}S_{k-1}$ gilt für $1 < k \leq n$. Gemeinsam mit $S_1 = a_1 + \dots + a_n \leq \frac{1}{2}$ folgt hieraus nämlich $S_k \leq \frac{1}{2^{k-1}}S_1 \leq \frac{1}{2^k}$. Schauen wir uns in der Summe S_k zunächst alle Summanden an, in denen a_1 vorkommt. Dies sind jeweils unterschiedliche Produkte von a_1 mit $k-1$ weiteren Faktoren a_i

(wobei a_1 unter diesen weiteren Faktoren nicht mehr auftritt). Die Summe dieser Summanden ist somit kleiner als $a_1 S_{k-1}$. Die gleiche Betrachtung für $a_2, \ldots, a_n$ liefert

$$S_k \leq a_1 S_{k-1} + a_2 S_{k-1} + \cdots + a_n S_{k-1} = S_1 S_{k-1}.$$

(Man beachte, dass jeder Summand in S_k auch in der rechten Summe auftaucht, sogar mehrfach. Da aber alle auftretenden Zahlen positiv sind, wird die rechte Seite hierdurch nur größer.) Also gilt $S_k \leq \frac{1}{2} S_{k-1}$, wie behauptet. □

Alternative Lösung. Wir verwenden die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel. Nach Voraussetzung ist

$$\sqrt[n]{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} \leq \frac{(1+a_1)+(1+a_2)+\cdots+(1+a_n)}{n} \leq 1+\frac{1}{2n},$$

so dass

$$\begin{aligned}(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) &\leq \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{2^j n^j} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!2^j n^j} \\ &< \sum_{j=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n\cdot n\cdots n\cdot 2^j} \\ &< \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^j} < 2.\end{aligned}$$

□

Alternative Lösung. Verwendet man die Exponentialfunktion e^x, so geht es schneller: Für positive x ist

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots > 1 + x,$$

so dass für $j = 1, 2, \ldots, n$

$$e^{a_j} > 1 + a_j$$

gilt. Multiplizieren wir diese Ungleichungen miteinander, so erhalten wir

$$e^{a_1+a_2+\cdots+a_n} = e^{a_1} \cdot e^{a_2} \cdots e^{a_n} > (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$$

und weiter wegen der Monotonie der Exponentialfunktion

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) < e^{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq e^{1/2} = \sqrt{e} < 2.$$

□

Aufgabe M.6 (9 P.)**.** Das Dreieck ΔABC sei nicht gleichschenklig. AC und BC seien Grundseiten der gleichschenkligen Dreiecke $\Delta ACB'$ und $\Delta CBA'$, die jeweils außerhalb von ΔABC liegen und den gleichen Winkel φ an der Grundseite haben. Der Schnittpunkt der Senkrechten auf $A'B'$ durch C mit der Mittelsenkrechten von AB heiße C_1. Bestimme den Winkel $\angle BC_1A$.

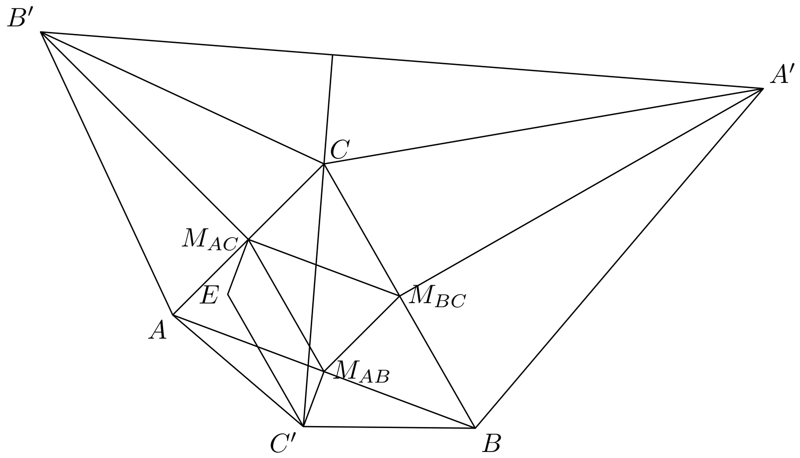

Abbildung 5: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.6.

Lösung. Siehe Abbildung 5.

Zusätzlich zu den in der Aufgabenstellung konstruierten Punkten sei C' so gewählt, dass $\Delta AC'B$ ein gleichschenkliges Dreiecks mit Grundseite AB und Winkel $90° - \varphi$ an der Grundseite ist, welches außerhalb von ΔABC liegt. Außerdem seien M_{AB}, M_{AC} und M_{BC} die Mittelpunkte der Seiten AB, AC und BC. Schließlich sei E so gewählt, dass $C'M_{AB}M_{AC}E$ ein Parallelogramm ist. Wir zeigen, dass $C' = C_1$ gilt, womit wir $\angle BC_1A = \angle BC'A = 2\varphi$ bewiesen haben.

Wir behaupten, dass die Gerade durch C und C' senkrecht zur Geraden durch A' und B' verläuft. Ist dies der Fall, so ist C' der Schnittpunkt der Senkrechten auf $A'B'$ durch C mit der Mittelsenkrechten auf AB (auf der C' nach Konstruktion liegt) und somit $C' = C_1$.

Da die Dreiecke $\Delta BA'M_{BC}$, $\Delta CB'M_{AC}$ und $\Delta C'BM_{AB}$ ähnlich sind, haben wir

$$\frac{|A'M_{BC}|}{|BM_{BC}|} = \frac{|B'M_{AC}|}{|CM_{AC}|} = \frac{|BM_{AB}|}{|C'M_{AB}|}$$

und somit

$$2 \cdot \frac{|A'M_{BC}|}{|BC|} = 2 \cdot \frac{|B'M_{AC}|}{|AC|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AB|}{|C'M_{AB}|}.$$

Schreiben wir $d := 2\frac{|A'M_{BC}|}{|BC|}$, so gilt daher $|A'M_{BC}| = \frac{1}{2}d\,|BC|$, $|B'M_{AC}| = \frac{1}{2}d\,|AC|$ und $|M_{AC}E| = |C'M_{AB}| = \frac{1}{2d}\,|AB|$. Zudem gilt nach dem Strahlensatz $|M_{AC}M_{BC}| = \frac{1}{2}\,|AB|$ und $|EC'| = |M_{AB}M_{AC}| = \frac{1}{2}\,|BC|$. Betrachten wir nun die Vierecke $B'M_{AC}M_{BC}A'$ und $CM_{AC}EC'$. Da $M_{AC}M_{BC}$ und AB parallel sind, gilt

$$\angle A'M_{BC}M_{AC} = \angle A'M_{BC}C + \angle CM_{BC}M_{AC} = 90° + \angle CBA.$$

Entsprechend folgt $\angle C'EM_{AC} = \angle M_{AC}M_{AB}C' = 90° + \angle CBA$, $\angle M_{BC}M_{AC}B' = 90° + \angle BAC$ und $\angle EM_{AC}C = 90° + \angle BAC$, da $\angle EM_{AC}M_{BC} = \angle AM_{AB}C' =$

90°. Zudem gilt

$$\begin{aligned}
\frac{|B'M_{AC}|}{|CM_{AC}|} &= \frac{\frac{1}{2}d\,|AC|}{\frac{1}{2}\,|AC|} = d\\
\frac{|M_{AC}M_{BC}|}{|M_{AC}E|} &= \frac{\frac{1}{2}\,|AB|}{\frac{1}{2d}\,|AB|} = d\\
\frac{|M_{BC}A'|}{|EC'|} &= \frac{\frac{1}{2}d\,|BC|}{\frac{1}{2}\,|BC|} = d.
\end{aligned}$$

Daher stehen in den Vierecken $B'M_{AC}M_{BC}A'$ und $CM_{AC}EC'$ drei Seiten im gleichen Längenverhältnis zueinander und die beiden eingeschlossenen Winkel sind identisch. Also sind die beiden Vierecke ähnlich. Da ihre Seiten $B'M_{AC}$ und CM_{AC} senkrecht zueinander verlaufen, gilt dies für alle ihre Seiten und somit insbesondere für $B'A'$ und CC'. □

Aufgabe M.7. Die unendliche Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sei wie folgt gegeben: $a_1 = 1$ und für $n > 1$ sei $a_n = a_{n-1} + 1$, wenn der größte ungerade Teiler von n den Rest 1 bei der Division durch 4 lässt, und $a_n = a_{n-1} - 1$, wenn dieser Rest 3 ist. Beweise, dass in dieser Folge

(a) (5 P.) die Zahl 1 unendlich oft vorkommt und

(b) (5 P.) jede positive ganze Zahl unendlich oft vorkommt.

(Bemerkung: Der Anfang der Folge ist 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, ...)

LÖSUNG. (a) Zunächst wird gezeigt, dass $a_{2n} = a_n$ für jedes gerade n. Es sei $d_n = a_n - a_{n-1}$ die Folge der Differenzen, die immer 1 oder -1 sind; dabei wird $d_1 = 1$ festgelegt. Also ist

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} d_k = d_1 + d_2 + \cdots + d_n.$$

Da n und $2n$ den gleichen größten ungeraden Teiler haben, ist $d_{2n} = d_n$. Also ist

$$\begin{aligned}
a_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} d_k &&= d_1 + d_2 + \cdots + d_{2n-1} + d_{2n}\\
= \sum_{k=1}^{n} d_{2k} + \sum_{k=1}^{n} d_{2k-1} &&= (d_2 + \cdots + d_{2n}) + (d_1 + \cdots + d_{2n-1})\\
= \sum_{k=1}^{n} d_k + \sum_{k=1}^{n} d_{2k-1} &&= (d_1 + \cdots + d_n) + (d_1 + \cdots + d_{2n-1})\\
= a_n + \sum_{k=1}^{n} d_{2k-1} &&= a_n + (d_1 + \cdots + d_{2n-1}).
\end{aligned}$$

Da die ungeraden Zahlen immer sich selbst als größten ungeraden Teiler haben, sind die d_{2k-1} immer abwechselnd 1 und -1. Für n gerade ist davon eine gerade Anzahl vorhanden, weshalb $\sum_{k=1}^{n} d_{2k-1} = 0$.

Da $a_2 = 2$, gilt also für jede Zweierpotenz $2^k \geq 2$, dass $a_{2^k} = 2$. Außerdem ist $d_{2^k} = 1$, also

$$a_{2^k-1} = a_{2^k} - d_{2^k} = 1.$$

An diesen Stellen kommt die 1 vor, also insbesondere auch unendlich oft.

(b) Ist n ungerade, so ist $\sum_{k=1}^{n} d_{2k-1} = 1$, da sich ein Summand nicht weghebt und der erste $d_1 = 1$ ist.

Für ungerade n ist also $a_{2n} = a_n + 1$. Ist n ungerade, so ist $4n + 1$ wieder ungerade und

$$a_{4n+1} = a_{4n} + d_{4n+1} = a_{2n} + 1 = a_n + 1 + 1 = a_n + 2,$$

da $d_{4n+1} = 1$.

Beginnt man mit $a_1 = 1$, erhält man also jede ungerade Zahl in der Folge, und zwar ist $a_{s_n} = 2n-1$ für $s_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{2(k-1)} = 1+2^2+2^4+\cdots+2^{2(n-1)}$.

Zwischen s_n und s_{n+1} liegt auch eine Zweierpotenz, also auch ein Folgenglied 2. Da sich aufeinanderfolgende Folgenglieder nur um 1 unterscheiden, taucht also nach $a_{s_n} = 2n - 1$ jede kleinere Zahl als $2n - 1$ wieder auf. Jede positive Zahl kommt also unendlich oft in der Folge vor. □

Bemerkung. Aus der Dualdarstellung einer Zahl n lässt sich a_n sofort ablesen. Man zählt nämlich die Anzahl der Blöcke aus gleichen (aufeinanderfolgenden) Ziffern und erhält a_n.

Um dieses zu zeigen, benötigt man $a_{2n} = a_n$ (Anfügen einer 0 an letzte Ziffer 0) und $a_{2n+1} = a_n + 1$ (Anfügen einer 1 an letzte Ziffer 0) für gerade n sowie $a_{2n} = a_n + 1$ (Anfügen einer 0 an letzte Ziffer 1) und $a_{2n+1} = a_n$ (Anfügen einer 1 an letzte Ziffer 0) für ungerade n.

Für gerade n wurde $a_{2n} = a_n$ in der Lösung gezeigt; außerdem ist $a_{2n+1} = a_{2n} + d_{2n+1} = a_n + 1$. Für ungerade n wurde $a_{2n} = a_n + 1$ in der Lösung gezeigt; außerdem ist $a_{2n+1} = a_{2n} + d_{2n+1} = a_n + 1 - 1 = a_n$.

Nach dieser Beobachtung benötigt man den letzten Absatz von (a) nicht und nur den ersten Absatz von (b). Danach kann man für jede Zahl n unendlich viele Stellen direkt angeben, an denen sie in der Folge vorkommt. Man beginnt mit $(1010\ldots101)_2$ für n ungerade bzw. $(1010\ldots10)_2$ für n gerade und schreibt vor die erste Ziffer immer wieder eine 1.

Bemerkung. Mit Überlegungen ähnlich denen von oben kann man die Folge auch rekursiv jeweils bis zur nächsten Zweierpotenz erzeugen, zunächst als Kopie um 2 erhöht, dann einfach als Kopie: $a_{2^k+1} = a_1+2, \ldots, a_{2^k+2^{k-1}-1} = a_{2^{k-1}-1}+2$ und $a_{2^k+2^{k-1}} = a_{2^{k-1}}, \ldots, a_{2^k+2^k} = a_{2^k}$ für $k \geq 2$. Da die bisher größte Zahl (spätestens) nach einem Verdoppeln der Folgenlänge in der ersten Hälfte vorkommt, kommt sie nach nochmaligem Verdoppeln auch um zwei erhöht vor. Somit kommen immer größere Zahlen in der Folge vor und die 1 immer wieder, also auch jede Zahl unendlich oft.

O Oberstufe

Aufgabe O.1 (4 P.). Ein quadratisches Brett ist durch jeweils sieben Linien parallel zu den Seiten in 64 rechteckige Felder aufgeteilt, die wie ein Schachbrett gefärbt sind. Die Felder können unterschiedlich groß sein, allerdings ist das Verhältnis der Fläche irgendeines weißen Feldes zu der irgendeines schwarzen Feldes nie größer als 2. Ermittle das maximal mögliche Verhältnis der Gesamtfläche aller weißen Felder zur Gesamtfläche aller schwarzen Felder.

Lösung. Das maximal mögliche Verhältnis ist $\frac{5}{4}$. Wählt man die Abstände der Trennungslinien zueinander beziehungsweise zum Rand abwechselnd als $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{12}$ der Kantenlänge des gesamten Bretts (wie in Abbildung 6), so ergibt sich gerade dieses Verhältnis, denn es gibt insgesamt 32 schwarze Felder der Größe $\frac{1}{6} \times \frac{1}{12}$, was einer Gesamtfläche von $\frac{32}{72} = \frac{4}{9}$ entspricht. Die Gesamtfläche der weißen Felder beträgt daher $\frac{5}{9}$, weswegen das behauptete Verhältnis angenommen wird. Zudem ist offensichtlich kein weißes Feld mehr als doppelt so groß wie ein schwarzes Feld.

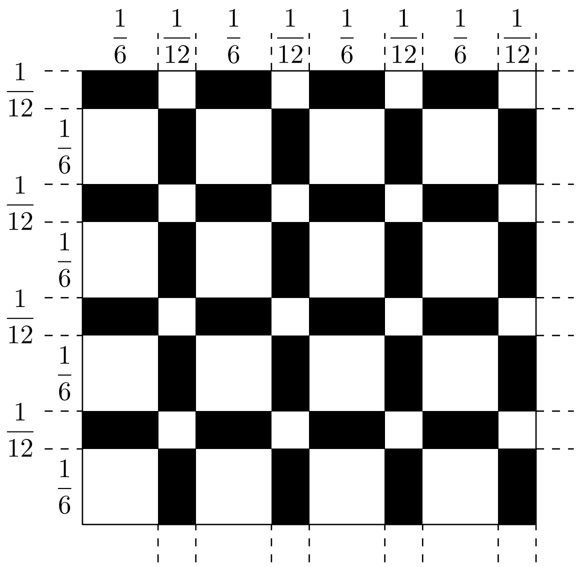

Abbildung 6: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.1.

Um zu zeigen, dass kein größeres Verhältnis möglich ist, gehen wir von einer beliebigen Unterteilung aus, welche den Voraussetzungen genügt. Zerschneidet man das Brett entlang jeder zweiten Unterteilungslinie, so zerfällt das Brett in 16 Teile, welche allesamt aus zwei weißen und zwei schwarzen Feldern bestehen. Wir zeigen nun, dass in keinem dieser Teile ein Verhältnis von mehr als $\frac{5}{4}$ von weißer Fläche zu schwarzer Fläche herrschen kann; damit ist auch das Gesamtverhältnis maximal $\frac{5}{4}$.

Die Höhen und Breiten der einzelnen Felder in einem solchen Teil seien mit a_1, a_2 sowie b_1, b_2 bezeichnet, siehe auch Abbildung 7. Wir können annehmen, dass $a_1 \geq a_2$ gilt (ansonsten drehen wir die Anordnung um 180°). Offensichtlich gilt $a_1 \leq 2a_2$ und $b_1 \leq 2b_2$. Verschiebt man nun die senkrechte Trennungslinie so weit nach rechts, bis $b_1 = 2b_2$ gilt, wird das linke untere (weiße) Feld um $a_1 d$ größer (wobei d den Betrag bezeichnet, um den die Linie verschoben wird) und das rechte obere Feld um $a_2 d$ kleiner. Wegen $a_1 \geq a_2$ wird die weiße Fläche also nicht kleiner. Analog verschiebt man dann die waagerechte Trennungslinie so weit nach oben, bis $a_1 = 2a_2$ gilt. Erneut wird die weiße Fläche nicht kleiner.

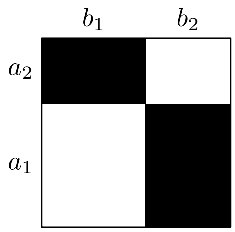

Abbildung 7: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.1.

Das Verhältnis von weißer zu schwarzer Fläche beträgt nun

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2}{a_1b_2 + a_2b_1} = \frac{4a_2b_2 + a_2b_2}{2a_2b_2 + 2a_2b_2} = \frac{5}{4}.$$

Da die weiße Fläche durch das Verschieben der Linien höchstens größer geworden ist, war das Verhältnis vor dem Verschieben maximal $\frac{5}{4}$. □

Aufgabe O.2 (6 P.)**.** Der (dreidimensionale) Raum wird in nicht-überlappende gleich große Würfel zerlegt. Ist es dabei notwendig, dass zu jedem Würfel (mindestens) ein anderer existiert, so dass beide eine gemeinsame Seitenfläche haben?

Lösung. Es existiert nicht notwendig zu jedem Würfel ein anderer mit gemeinsamer Seitenfläche. Eine geeignete Zerlegung kann wie folgt konstruiert werden: Zunächst unterteilt man den Raum in Würfel der Kantenlänge 1 durch Schnittebenen parallel zur x-y-Ebene, zur x-z-Ebene beziehungsweise zur y-z-Ebene. Hierbei teilt jeder Würfel jede seiner Seitenflächen mit einem anderen Würfel.

Nun wird diese Unterteilung wie folgt abgeändert: Man wählt einen Würfel W aus und betrachtet seine beiden „Nachbarn" in Richtung der x-Achse sowie alle Würfel, die von einem der beiden „Nachbarn" aus gesehen in Richtung der y-Achse liegen. Diese beiden „Ketten" von Würfeln verschiebt man um $\frac{1}{2}$ in Richtung der y-Achse. Analog verfährt man mit den beiden „Nachbarn" von W in Richtung der y-Achse und allen Würfeln, die von einem dieser „Nachbarn" aus gesehen in Richtung der z-Achse liegen (man verschiebt diese in Richtung der z-Achse), sowie mit den beiden „Nachbarn" von W in Richtung der z-Achse und allen Würfeln, die von einem dieser „Nachbarn" aus gesehen in Richtung der x-Achse liegen (man verschiebt diese in Richtung der x-Achse). Es ist leicht zu sehen, dass die sechs „Ketten" von Würfeln, die hierbei verschoben werden, sich nicht überschneiden (siehe Abbildung 8).

Daher ergibt sich eine erlaubte Unterteilung. Da alle „Nachbarn" von W um $\frac{1}{2}$ verschoben wurden, teilt W nun keine Seitenfläche mehr mit einem anderen Würfel. □

Aufgabe O.3 (6 P.)**.** Auf einem Tisch liegen zunächst N Haufen mit je einer Nuss, $N > 2$. Zwei Spieler ziehen abwechselnd, indem sie jeweils zwei Haufen auswählen, die teilerfremde Anzahlen von Nüssen haben, und diese zu einem Haufen zusammenlegen. Der Spieler, der den letzten Zug macht, gewinnt. Ermittle für jedes N den Spieler, der gewinnen kann unabhängig davon, wie der Gegner spielt.

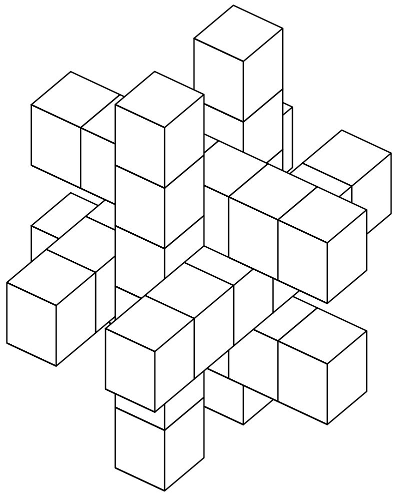

Abbildung 8: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.2.

LÖSUNG. Für jedes $N > 2$ kann Spieler 2 mit einer geeigneten Spielweise den Sieg erzwingen.

Im ersten Zug muss Spieler 1 zwei Haufen mit je einer Nuss zusammenlegen, so dass folgende Spielsituation entsteht:

$$2\ 1\ 1\ \ldots\ 1$$

Spieler 2 sorgt nachfolgend stets dafür, dass nur ein einziger Haufen mit mehr als einer Nuss vorhanden ist, während alle anderen Haufen nur eine einzige Nuss enthalten dürfen. Der Haufen mit mehr als einer Nuss enthält dabei stets eine ungerade Anzahl an Nüssen:

$$u\ 1\ 1\ \ldots\ 1$$

Dadurch gelangt Spieler 1 stets in die Situation, dass er einen Haufen mit einer ungeraden Anzahl an Nüssen größer eins sowie einige Haufen mit nur einer Nuss vorliegen hat. Spieler 1 hat daher lediglich zwei verschiedene Zugmöglichkeiten. Er kann entweder eine weitere Nuss auf den großen Haufen legen, oder er vereinigt zwei kleine Haufen zu einem Haufen mit zwei Nüssen:

$$g\ 1\ 1\ \ldots\ 1 \quad \text{oder} \quad u\ 2\ 1\ \ldots\ 1$$

Im ersten Fall kann Spieler 2 erneut eine Nuss auf den großen Haufen legen, wodurch dieser wieder eine ungerade Anzahl an Nüssen enthält und die gleiche Situation wie zuvor wiederhergestellt wird. Im zweiten Fall kann er den Haufen mit der ungeraden Anzahl an Nüssen mit dem neu erschaffen Haufen mit zwei Nüssen vereinigen und kommt ebenfalls zu der gleichen Verteilung. Ist N nun ungerade, behält Spieler 2 diese Strategie bis zum Schluss bei und tätigt so den letzten Zug.

Ist N gerade, muss Spieler 2 kurz vor Ende, nämlich dann, wenn lediglich drei Stapel übrig sind, anders agieren. Die möglichen Positionen sind zu diesem Zeitpunkt, wie oben beschrieben,

$$g\ 1\ 1 \quad \text{oder} \quad u\ 2\ 1.$$

Im ersten Fall kann Spieler 2 die beiden Haufen mit nur einer Nuss vereinigen und gewinnt, weil beide verbleibenden Stapel eine gerade Anzahl an Nüssen enthalten und die Anzahlen somit nicht teilerfremd sind. Im zweiten Fall kann Spieler 2 den Stapel mit der ungeraden Anzahl an Nüssen mit der einen Nuss vereinigen und erhält zwei Stapel mit einer geraden Anzahl an Nüssen. Auch in diesem Fall gibt es für Spieler 1 keinen möglichen Zug mehr. Folglich kann Spieler 2 für jedes $N > 2$ gewinnen. □

Aufgabe O.4 (6 P.)**.** Das Trapez $ABCD$ sei nicht gleichschenklig. (Bemerkung: Ein Trapez heißt gleichschenklig, wenn die Mittelsenkrechten zweier paralleler Seiten zusammenfallen. Dann sind an jeder dieser zwei Seiten die beiden angrenzenden Winkel gleich.) Der Umkreis des Dreiecks ΔBCD schneide die Gerade durch A und C zweimal, einmal in C und einmal im Punkt A_1. Analog seien B_1, C_1 und D_1 definiert. Beweise, dass $A_1B_1C_1D_1$ ebenfalls ein Trapez ist.

Lösung. Siehe Abbildung 9.

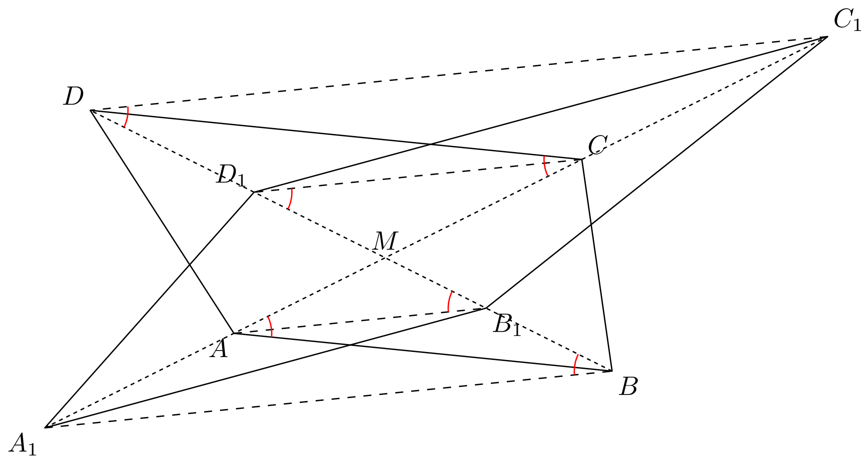

Abbildung 9: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.4.

Im Kreis um A_1BCD sind über der Sehne A_1D die Winkel bei B und C gleich, also $\angle DBA_1 = \angle DCA_1$. Betrachtet man den Kreis um AB_1CD, so erhält man über der Sehne AD ebenfalls $\angle DB_1A = \angle DCA = \angle DCA_1$, da C, A_1 und A auf einer Geraden liegen. Insgesamt gilt somit $\angle DBA_1 = \angle DB_1A$, also

$$AB_1 \parallel A_1B.$$

Ganz analog gilt auch $D_1C \parallel DC_1$.

Ohne Einschränkung sei $AB \parallel DC$. Als Wechselwinkel sind $\angle DCA = \angle BAC$. Insgesamt gilt also

$$\angle DBA_1 = \angle BAC = \angle DB_1A = \angle BD_1C = \angle DCA = \angle BDC_1$$

und somit

$$AB_1 \parallel A_1B \parallel DC_1 \parallel D_1C.$$

Damit wendet man nun den Strahlensatz auf die Strahlen durch A, A_1, C_1 und C bzw. B_1, B, D und D_1 mit deren Schnittpunkt M an. Wegen $AB \parallel DC$,

$A_1B \parallel DC_1$ bzw. $AB_1 \parallel D_1C$ erhält man also

$$\frac{|AM|}{|BM|} = \frac{|CM|}{|DM|}, \qquad \frac{|BM|}{|DM|} = \frac{|A_1M|}{|C_1M|} \quad \text{und} \quad \frac{|B_1M|}{|D_1M|} = \frac{|AM|}{|CM|}.$$

Diese Gleichungen setzt man ineinander ein und erhält $\frac{|A_1M|}{|C_1M|} = \frac{|BM|}{|DM|} = \frac{|AM|}{|CM|} = \frac{|B_1M|}{|D_1M|}$, also

$$\frac{|A_1M|}{|B_1M|} = \frac{|C_1M|}{|D_1M|}.$$

Nach umgekehrtem Strahlensatz ist also

$$A_1B_1 \parallel D_1C_1. \qquad \square$$

Aufgabe O.5 (8 P.)**.** Die unendliche Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sei wie folgt gegeben: $a_1 = 1$ und für $n > 1$ sei $a_n = a_{n-1} + 1$, wenn der größte ungerade Teiler von n den Rest 1 bei der Teilung durch 4 lässt, und $a_n = a_{n-1} - 1$, wenn dieser Rest 3 ist. Beweise, dass in dieser Folge jede positive ganze Zahl unendlich oft vorkommt.

(Bemerkung: Der Anfang der Folge ist 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, . . .)

Lösung. Siehe Lösung von Aufgabe M.7 Teil b. $\square$

Aufgabe O.6 (9 P.)**.** Das Polynom $P(x)$ habe reelle Koeffizienten. Ferner gebe es unendlich viele Paare ganzer Zahlen (m, n), für die $P(m) + P(n) = 0$ gilt. Beweise, dass es einen Punkt gibt, um den der Graph $y = P(x)$ punktspiegelsymmetrisch ist.

Lösung. Wir treffen zunächst ein paar Feststellungen über Polynome, welche wir im Folgenden häufiger verwenden. Ein Polynom $Q(x)$, welches nicht das Nullpolynom ist, hat nur endlich viele Nullstellen (maximal so viele wie sein Grad). Außerdem gibt es für jedes $y \in \mathbb{R}$ nur endlich viele $z \in \mathbb{R}$ mit $Q(y) + Q(z) = 0$, denn ansonsten hätte $R(x) := Q(x)+Q(y)$ unendlich viele Nullstellen, wäre also das Nullpolynom. Dann wäre jedoch $0 = R(y) = 2Q(y)$, also $Q(y) = 0$ und somit $Q(x) = R(x)$ das Nullpolynom.

Ist $Q(x) = b_kx^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_0$ mit $k > 0$ und $b_k > 0$, so gilt $Q(x) > 0$ für hinreichend große x, denn für $x > \frac{1}{b_k}(|b_{k-1}| + |b_{k-2}| + \cdots + |b_0|)$ (und zusätzlich $x > 1$) gilt

$$\begin{aligned} x >& \frac{1}{b_k}\left(|b_{k-1}| + \frac{|b_{k-2}|}{x} + \cdots + \frac{|b_0|}{x^{k-1}}\right) \\ \geq& -\frac{1}{b_k}\left(b_{k-1} + \frac{b_{k-2}}{x} + \cdots + \frac{b_0}{x^{k-1}}\right) \\ \Rightarrow \qquad b_kx^k >& -\left(b_{k-1}x^{k-1} + b_{k-2}x^{k-2} + \cdots + b_0\right). \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass $Q(x) > cx^k$ gilt für jedes $c < b_k$ und hinreichend großes x (man betrachte das Polynom $Q(x) - cx^k$), sowie $Q(x) < Cx^k$ für jedes $C > b_k$ und hinreichend großes x (man betrachte das Polynom $Cx^k - Q(x)$). Gleiches gilt offensichtlich auch für die Beträge: $c\,|x|^k < |Q(x)| < C\,|x|^k$ für $c < b_k < C$ und hinreichend großes x. Analog erhalten wir die gleiche Ungleichung auch für hinreichend kleines x, wobei $Q(x)$ für solches x negativ ist, falls Q ungeraden

Grad hat, und positiv, falls Q geraden Grad hat. Falls Q einen negativen Leitkoeffizienten hat, gilt entsprechend auch $c\,|x|^k < |Q(x)| < C\,|x|^k$ für $c < |b_k| < C$ und betragsmäßig hinreichend großes x.

Wir können annehmen, dass P nicht das Nullpolynom ist, da dessen Graph offensichtlich punktspiegelsymmetrisch ist. Weiter können wir das Polynom als normiert annehmen, also mit Leitkoeffizient 1. Wie oben gezeigt, kann es zu festem $n \in \mathbb{Z}$ nur endlich viele $m \in \mathbb{Z}$ geben mit $P(m) + P(n) = 0$. Daher müssen die in Frage kommenenden Zahlen m bzw. n betragsmäßig beliebig groß werden. Also muss der Grad u von $P(x)$ ungerade sein, denn andernfalls hätten $P(n)$ und $P(m)$ für betragsmäßig große $m, n \in \mathbb{Z}$ positives Vorzeichen. Zudem gibt es gesuchte Paare (m, n) mit beliebig kleinem m und beliebig großem n. Wir schreiben $P(x) = x^u + a_{u-1}x^{u-1} + \cdots + a_0$.

Gibt es für eine ganze Zahl s unendlich viele Paare (m, n) mit $m + n = s$ und $P(m) + P(n) = 0$, so hat das Polynom $Q(x) := P(x) + P(s - x)$ unendlich viele Nullstellen (nämlich bei jedem solchen m und n) und wäre somit das Nullpolynom. Dies bedeutet, dass der Graph $y = P(x)$ punktspiegelsymmetrisch um den Punkt $(\frac{s}{2}, 0)$ ist. Nehmen wir nun an, dass es für jedes solche s nur endlich viele Paare (m, n) mit $m + n = s$ und $P(m) + P(n) = 0$ gibt. Diese Annahme werden wir zum Widerspruch führen, womit dann gezeigt ist, dass der Graph punktspiegelsymmetrisch ist.

Da es unendlich viele Paare (m, n) mit $P(m) + P(n) = 0$ gibt, aber nach Annahme nur jeweils endlich viele die gleiche Summe $m + n$ haben, gibt es für $m + n$ beliebig große oder beliebig kleine Werte, ohne Einschränkung gebe es beliebig große Werte.

Wir schreiben $G(x)$ für das Polynom $a_g x^g + a_{g-2}x^{g-2} + \cdots + a_0$, das aus allen geradzahligen Koeffizienten und Potenzen aus $P(x)$ besteht. Falls G das Nullpolynom ist, sind in P nur die ungeradzahligen Koeffizienten nicht Null und der Graph $y = P(x)$ offensichtlich punktspiegelsymmetrisch um den Ursprung des Koordinatensystems. Wir können also annehmen, dass G nicht das Nullpolynom ist und somit $a_g \neq 0$.

Wie oben gezeigt gilt $\frac{1}{2}\,|x|^u < |P(x)| < 2\,|x|^u$ für betragsmäßig hinreichend großes x. Ebenso gilt $|P'(x)| > \frac{u}{2}\,|x|^{u-1}$ für betragsmäßig hinreichend großes x (man beachte $P'(x) = ux^{u-1} + (u-1)a_{u-1}x^{u-2} + \cdots + a_1$) und $|G(x)| \leq 2\,|a_g| \cdot |x|^g$ für solches x. Sei $C > 1$ eine Konstante, so dass die obigen Ungleichungen für alle x mit $|x| > C$ gelten.

Wir können nun annehmen, dass es Paare $(m_i, n_i),\ i \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle i die folgende Annahmen gelten:

- $P(m_i) + P(n_i) = 0$,
- $m_i + n_i \geq i$ und
- $m_i < -C$ sowie $C < n_i$ (also insbesondere $|m_i|, |n_i| > C$).

Für alle i gilt wegen $|m_i|, |n_i| > C$

$$\frac{1}{2}\,|m_i|^u > |P(m_i)| = |P(n_i)| > 2\,|n_i|^u\,. \tag{1}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}P(n_i) + P(-n_i) =& n_i^u + a_{u-1}n_i^{u-1} + \cdots + a_0\\ &+ (-n_i)^u + a_{u-1}(-n_i)^{u-1} + \cdots + a_0\\ =& 2\left(a_{u-1}n_i^{u-1} + a_{u-3}n_i^{u-3} + \cdots + a_0\right) = 2G(n_i)\end{aligned}$$

und daher

$$P(m_i) - P(-n_i) = -2G(n_i).$$

Nun ist nach dem Mittelwertsatz

$$P(m_i) - P(-n_i) = (m_i - (-n_i))P'(x_i) = (m_i + n_i)P'(x_i)$$

für ein x_i mit $-n_i < x_i < m_i$ (man beachte, dass $m_i \geq i - n_i > -n_i$), also $|x_i| > C$. Wegen $|n_i|, |x_i| > C$ gilt $|P'(x_i)| \geq \frac{u}{2}|x_i|^{u-1}$ sowie $|G(n_i)| < 2|a_g| \cdot |n_i|^g$ und somit

$$|m_i + n_i| = \frac{2|G(n_i)|}{|P'(x_i)|} \leq \frac{4|a_g||n_i|^g}{\frac{u}{2}|x_i|^{u-1}}.$$

Nun ist $g \leq u - 1$ und wegen (1) ist $|x_i| > |m_i| > \sqrt[u]{4}|n_i|$, also

$$|x_i|^{u-1} > (\sqrt[u]{4})^{u-1}|n_i|^{u-1} > 4|n_i|^{u-1}$$

und daher

$$|m_i + n_i| \leq \frac{4|a_g||n_i|^g}{\frac{u}{2}4|n_i|^{u-1}} \leq \frac{2|a_g|}{u|n_i|^{u-1-g}} \leq \frac{2|a_g|}{u}.$$

Dies kann aber für $i > \frac{2|a_g|}{u}$ nicht gelten, da nach Annahme $m_i + n_i \geq i$ ist. Somit haben wir einen Widerspruch zur Annahme erreicht, jede ganze Zahl komme nur endlich häufig als Summe $m + n$ für ganze Zahlen mit $P(m) + P(n) = 0$ vor. Also kommt eine ganze Zahl s unendlich oft als solche Summe vor und daher ist $(\frac{s}{2}, 0)$ ein Spiegelsymmetriepunkt. □

Alternative Lösung. Man kann den Beweis auch ohne den Mittelwertsatz führen: Mit $Q(x)$ bezeichnen wir das Polynom $a_{u-2}x^{u-2} + a_{u-3}x^{u-3} + \cdots + a_0$. Dann ist

$$P(m_i) + P(n_i) = m_i^u + n_i^u + a_{u-1}(m_i^{u-1} + n_i^{u-1}) + Q(m_i) + Q(n_i).$$

Es ist leicht zu sehen, dass $|Q(x)| \leq (u-1)A \cdot |x|^{u-2}$ gilt für $|x| \geq 1$ (mit $A = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_u|\}$), also insbesondere

$$\begin{aligned}Q(n_i) &\geq -(u-1)A \cdot n_i^{u-2}\\ Q(m_i) &\geq -(u-1)A \cdot |m_i|^{u-2} > -(u-1)An_i^{u-2}.\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}m_i^u + n_i^u &= n_i^u - (-m_i)^u\\ &= \left(n_i - (-m_i)\right)\left(n_i^{u-1} + n_i^{u-2}(-m_i) + \cdots + n_i(-m_i)^{u-2} + (-m_i)^{u-1}\right)\\ &\geq i \cdot n_i^{u-1},\end{aligned}$$

weil $m_i + n_i \geq i$. Da zusätzlich wegen $|m_i| < |n_i|$ und $|a_{u-1}| \leq A$

$$a_{u-1}(m_i^{u-1} + n_i^{u-1}) \geq -2A \cdot n_i^{u-1}$$

gilt, haben wir

$$\begin{aligned} P(m_i) + P(n_i) &\geq i \cdot n_i^{u-1} - 2A \cdot n_i^{u-1} - 2(u-1)A \cdot n_i^{u-2} \\ &\geq n_i^{u-2}\big((i-2A)n_i - 2(u-1)A\big). \end{aligned}$$

Für $i > 2A + 2(u-1)A$ gilt also $P(m_i) + P(n_i) > 0$, im Widerspruch zur Annahme, dass $P(m_i) + P(n_i) = 0$. □

Aufgabe O.7. Ein Test habe 30 Fragen mit je zwei Antwortmöglichkeiten (einer richtigen und einer falschen). In jedem Versuch beantwortet Victor alle Fragen und wird über die Anzahl der richtigen Antworten informiert. Kann Victor seine Antworten so festlegen, dass er die Antworten aller Fragen

(a) (5 P.) nach dem 29sten Versuch kennt (er also im 30sten Versuch alle Fragen richtig beantworten kann)?

(b) (5 P.) nach dem 24sten Versuch kennt (er also im 25sten Versuch alle Fragen richtig beantworten kann)?

(Bemerkung: Anfangs weiß Victor die Antwort zu keiner Frage. Der Test ist bei jedem Versuch derselbe.)

Lösung. Die Fragen seien als Frage $1, 2, \ldots, 30$ durchnummeriert. Zur Vereinfachung der Schreibweise nehmen wir an, dass die Antwortmöglichkeiten bei allen Fragen identisch sind und X sowie Y lauten. Die Gesamtzahl der Fragen, für die X die richtige Antwort ist, sei x. Entsprechend sei $y = 30 - x$ die Zahl der Fragen, für die Y die Antwort ist. Mit F_i bezeichnen wir die Menge der 15 Fragen $i, i+1, \ldots, i+14$ falls $i \leq 15$ beziehungsweise $i, i+1, \ldots, 30, 1, 2, \ldots, i-16$ falls $i > 16$. Analog zu x und y bezeichnen wir mit x_i und y_i die Anzahl der Fragen in F_i, für die die Antwort X beziehungsweise Y lautet.

(a) Dieser Teil wird durch Teil b mit bewiesen. Da der Beweis für Teil a einfacher ist, führen wir ihn hier dennoch auf.

Im i-ten Versuch (für $i = 1, 2, \ldots, 29$) beantwortet Victor die Frage i mit Y und alle anderen Fragen mit X. Ist bei Frage i die korrekte Antwort X, hat Victor im i-ten Versuch diese Frage falsch beantwortet und von den anderen Fragen $x-1$ korrekt beantwortet, also hat er insgesamt $x-1$ richtige Antworten. Ist bei Frage i die korrekte Frage Y, so hat Victor diese Frage korrekt beantwortet und von den anderen Fragen weitere x korrekt beantwortet, also insgesamt $x+1$ richtige Antworten.

Die Anzahl der richtigen Antworten in den einzelnen Versuchen liegt also jeweils um genau 1 neben x. Hat Victor in irgendwelchen zwei Versuchen unterschiedlich viele richtige Antworten, so unterscheiden sich diese Anzahlen daher um 2 und er weiß, dass x genau zwischen diesen Anzahlen liegt. Mit diesem Wert von x kann er dann die richtigen Antworten auf die Fragen $1, 2, \ldots, 29$ errechnen. (Die richtige Antwort ist X, falls er im entsprechenden Versuch $x-1$ richtige Antworten hatte, und sie ist Y sonst.) Die richtige Antwort auf die letzte Frage kann er sich dann anhand von

x und der Fragen mit korrekter Antwort X unter den Fragen $1, 2, \ldots, 29$ auch ausrechnen.

Hat Victor bei allen Versuchen gleich viele richtige Antworten, so ist die korrekte Antwort bei den Fragen $1, 2, \ldots, 29$ identisch, also immer X oder immer Y. Für x bleiben somit nur die möglichen Werte 0, 1, 29 und 30. In den ersten beiden Fällen ist die korrekte Antwort auf die ersten 29 Fragen Y, in den letzten beiden Fällen ist es X. Erneut kann Victor sich auch die korrekte Antwort auf die letzte Frage errechnen.

(b) Victor kann bereits nach dem 23sten Versuch alle richtigen Antworten kennen.

Zunächst gibt Victor bei allen Fragen die Antwort Y und erfährt somit den Wert von y (und damit auch den Wert von x). Als nächstes beantwortet Victor für $i = 1, 2, \ldots, 15$ die Fragen in F_i mit X und die Fragen in F_{i+15} mit Y. Bei jedem dieser Versuche hat er $x_i + y_{i+15}$ korrekte Antworten. Da $y_{i+15} = 15 - x_{i+15} = 15 - (x - x_i)$ gilt, weiß Victor, dass er jeweils $15-x+2x_i$ korrekte Antworten gegeben hat. Da er den Wert von x bereits kennt, kann er x_i (und somit auch x_{i+15}) ausrechnen. Insgesamt hat Victor bis hierhin 16 Fragen gestellt.

Da F_i und F_{i+1} aus 14 gleichen Fragen sowie der Frage i (F_i) beziehungsweise $i+15$ (F_{i+1}) bestehen, können sich die Werte x_i und x_{i+1} höchstens um 1 unterscheiden. Sind sie gleich, haben die Fragen i und $i + 15$ die gleiche Antwort. Gilt $x_i = x_{i+1} + 1$, dann ist X die Antwort auf Frage i und Y die Antwort auf Frage $i + 15$. Gilt $x_i = x_{i+1} - 1$, sind die Antworten auf diese beiden Fragen gerade umgekehrt. Im ungünstigsten Fall gilt $x_i = x_{i+1}$ für alle $i = 1, 2, \ldots, 15$, dann weiß Victor noch keine Antwort.

Nun sucht sich Victor zwei unterschiedliche Werte $i, j = 1, 2, \ldots, 15$, für die $x_i = x_{i+1}$ und $x_j = x_{j+1}$ gilt (sofern es zwei gibt) und beantwortet die Fragen i, j sowie $i + 15$ mit X und alle anderen Fragen mit Y. Anhand der Anzahl der korrekten Antworten bei diesem Versuch kann Victor errechnen, bei wie vielen der drei Fragen i, j und $i+15$ die richtige Antwort X lautet: Bezeichnet z diese Anzahl, dann ist $y - (3 - z) = y + z - 3$ die Anzahl derjenigen der restlichen 27 Fragen, auf die Y die Antwort ist. Also hat Victor in diesem Versuch $y + 2z - 3$ korrekte Antworten gegeben und kann z berechnen, da er y bereits kennt. Da die Antwort auf Frage i und $i + 15$ identisch ist, muss er im Fall $z \geq 2$ beide Fragen korrekt beantwortet haben. Entsprechend hat er im Fall $z \leq 1$ beide Fragen falsch beantwortet. Falls z ungerade ist, hat Victor Frage j korrekt beantwortet, ansonsten hat er sie falsch beantwortet. Da Frage j und $j + 15$ die gleiche Antwort besitzen, kennt Victor nach diesem Versuch die Antworten auf die Fragen i, j, $i + 15$ und $j + 15$.

Diesen Versuch wiederholt Victor so oft, wie er noch zwei Werte $i, j = 1, 2, \ldots, 15$ findet, für die er die Antworten auf die Fragen i, j, $i + 15$ und $j + 15$ noch nicht kennt. Es gilt hierbei stets $x_i = x_{i+1}$ (sonst kennt er bereits die Antworten auf Frage i und $i + 15$) und ebenso $x_j = x_{j+1}$, weswegen er das gleiche Verfahren wie beim gerade beschriebenen Versuch anwenden kann. Da Victor in jedem dieser Versuche 4 neue Antworten erfährt, muss er dieses Verfahren maximal 7 mal anwenden. Danach gibt es maximal noch ein i zwischen 1 und 15, für das er die Antworten auf

Frage i und $i + 15$ nicht kennt. Da in diesem Fall jedoch beide Fragen die gleiche Antwort haben müssen und Victor die Antworten auf alle anderen Fragen bereits kennt, kann er sich anhand der Werte x und y die Antwort ausrechnen.

Insgesamt hat Victor maximal $1 + 15 + 7 = 23$ Versuche benötigt, um alle Antworten herauszufinden. □

Fragen und Anmerkungen. Schicken Sie diese bitte an *Städtewettbewerb Mathematik Hamburg* <stw.m.hh@gmail.com>. An den Lösungen haben mitgewirkt: Malte Lackmann, Prof. Dr. Helmut Müller, Torben Schiffner, Mara Sommerfeld, Philipp Sprüssel und Jan Henrik Sylvester.