M Mittelstufe

Aufgabe 1 (3 P.). In ein konvexes 2009-Eck werden sämtliche Diagonalen eingezeichnet. (Diagonalen verbinden alle nicht-benachbarten Ecken.) Es sei eine Gerade gegeben, die dieses 2009-Eck schneidet aber keine seiner Ecken trifft. Zeige, dass die Gerade eine gerade Anzahl von Diagonalen schneidet.

Aufgabe 2 (4 P.). Für die Potenz „a hoch b" schreiben wir a^b anstelle der üblichen Schreibweise a^b. In dem Ausdruck 7^7^7^7^7^7^7 müssen noch Klammern gesetzt werden, um die Reihenfolge der Rechenoperationen festzulegen, $\big((7\hat{}7)\hat{}(7\hat{}7)\big)\hat{}\big((7\hat{}7)\hat{}7\big)$ wäre eine Möglichkeit. (Es müssen genau 5 Paare von Klammern verwendet werden.) Kann man die Klammern auf zwei unterschiedliche Weisen setzen und dennoch das gleiche Ergebnis herausbekommen?

Aufgabe 3 (4 P.). Vlad möchte einige gleich große Würfel anfertigen. Auf die Seitenflächen der Würfel sollen derart Ziffern geschrieben werden, dass er jede 30-stellige Zahl darstellen kann, indem er 30 Würfel in eine Reihe legt. (Die Zahl soll dann auf der Oberseite der Würfel zu lesen sein.) Welches ist die kleinste Anzahl an Würfeln, mit denen Vlad dies erreichen kann? Hierbei gehen die Ziffern 6 und 9 nicht durch Drehung ineinander über.

Aufgabe 4 (4 P.). Es wird eine positive ganze Zahl vorgegeben. Wenn wir diese um 10% vergrößern, erhalten wir erneut eine ganze Zahl. Ist es möglich, dass dabei die Quersumme um genau 10% kleiner wird?

Aufgabe 5 (5 P.). Im Rhombus $ABCD$ sei $\angle BAD = 120°$. Nun wird ein Punkt M auf der Kante BC sowie ein Punkt N auf der Kante CD gewählt, so dass $\angle MAN = 30°$. Beweise, dass der Mittelpunkt des Umkreises von $\triangle AMN$ auf einer Diagonalen des Rhombus liegt.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden. Viel Erfolg!

O Oberstufe

Aufgabe 1 (3 P.). Für die Potenz „a hoch b“ schreiben wir $a\hat{}b$ anstelle der üblichen Schreibweise a^b. In dem Ausdruck 7^7^7^7^7^7^7 müssen noch Klammern gesetzt werden, um die Reihenfolge der Rechenoperationen festzulegen, $\big((7\hat{}7)\hat{}(7\hat{}7)\big)\hat{}\big((7\hat{}7)\hat{}7\big)$ wäre eine Möglichkeit. (Es müssen genau 5 Paare von Klammern verwendet werden.) Kann man die Klammern auf zwei unterschiedliche Weisen setzen und dennoch das gleiche Ergebnis herausbekommen?

Aufgabe 2 (4 P.). Es seien mehrere Punkte in der Ebene gegeben, wobei keine drei von ihnen auf einer Geraden liegen. Einige dieser Punkte werden nun derart mit Strecken verbunden, dass jede Gerade, die keinen der Punkte trifft, gerade viele dieser Strecken schneidet. Zeige, dass dann jeder der Punkte Endpunkt einer geraden Anzahl dieser Strecken ist.

Aufgabe 3. Für jede positive ganze Zahl n bezeichnen wir mit $O(n)$ ihren größten ungeraden Teiler. Für beliebige positive ganze Zahlen $x_1 = a$ und $x_2 = b$ wird nun eine unendliche Folge von positiven ganzen Zahlen durch die folgende Regel erzeugt: $x_n = O(x_{n-1} + x_{n-2})$ für $n = 3, 4, \ldots$

(a) (2 P.) Zeige, dass ab irgendeiner Stelle alle Folgenglieder den gleichen Wert haben.

(b) (2 P.) Wie kann dieser Wert berechnet werden, wenn a und b bekannt sind?

Aufgabe 4 (4 P.). Mehrere Nullen und Einsen werden in einer Reihe aufgeschrieben. In dieser Reihe betrachten wir solche Paare von (nicht notwendigerweise benachbarten) Ziffern, bei denen die linke Ziffer 1 und die rechte 0 ist. Sei M die Anzahl derjenigen solcher Paare, für welche zwischen der 1 und der 0 eine gerade Anzahl von Ziffern (möglicherweise auch keine) liegt. Entsprechend sei N die Anzahl derjenigen Paare, für welche zwischen der 1 und der 0 eine ungerade Anzahl von Ziffern liegt. Zeige, dass $M \geq N$.

Aufgabe 5 (4 P.). Es sei X ein beliebiger Punkt im Inneren eines (nicht notwendigerweise regelmäßigen) Tetraeders. Durch jede Ecke des Tetraeders zeichnen wir eine Gerade parallel zur Geraden durch X und den Schwerpunkt der Seitenfläche, die der Ecke gegenüber liegt. (Der Schwerpunkt eines Dreiecks ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.) Zeige, dass sich diese vier Geraden in einem Punkt schneiden.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden. Viel Erfolg!