Städtewettbewerb Frühjahr 2009
Lösungsvorschläge

Hamburg

4. März 2009 [Version 17. April 2009]

M Mittelstufe

Aufgabe M.1 (3 P.)**.** In ein konvexes 2009-Eck werden sämtliche Diagonalen eingezeichnet. (Diagonalen verbinden alle nicht-benachbarten Ecken.) Es sei eine Gerade gegeben, die dieses 2009-Eck schneidet aber keine seiner Ecken trifft. Zeige, dass die Gerade eine gerade Anzahl von Diagonalen schneidet.

Lösung. Da auch die Strecken zwischen benachbarten Punkten eingezeichnet sind (die Kanten des 2009-Ecks), sind je zwei verschiedene Eckpunkte durch eine Strecke verbunden. Also gehen von allen Eckpunkten auf einer Seite gleichviele Strecken aus, die die Gerade schneiden (jeweils zu allen Eckpunkten auf der anderen Seite der Geraden). Da 2009 ungerade ist, liegen auf einer der beiden Seiten gerade viele Eckpunkte. Es werden also eine gerade Anzahl von Strecken geschnitten. Da das 2009-Eck konvex ist, schneidet die Gerade genau zwei Kanten des 2009 Ecks. Also ist auch die Anzahl der geschnittenen Diagonalen gerade. □

Aufgabe M.2 (4 P.)**.** Für die Potenz „a hoch b“ schreiben wir a^b anstelle der üblichen Schreibweise a^b. In dem Ausdruck 7^7^7^7^7^7^7 müssen noch Klammern gesetzt werden, um die Reihenfolge der Rechenoperationen festzulegen, $\big((7\text{^}7)\text{^}(7\text{^}7)\big)\text{^}\big((7\text{^}7)\text{^}7\big)$ wäre eine Möglichkeit. (Es müssen genau 5 Paare von Klammern verwendet werden.) Kann man die Klammern auf zwei unterschiedliche Weisen setzen und dennoch das gleiche Ergebnis herausbekommen?

Lösung. Ja, das ist möglich. Betrachte die folgenden beiden Ausdrücke mit jeweils vier Siebenen. Es gilt

$$\begin{aligned}\big(7\text{^}7\big)\text{^}\big(7\text{^}7\big) &= 7^{7\cdot\left(7^7\right)} = 7^{(7^8)}\\ \big(7\text{^}\big(7\text{^}7\big)\big)\text{^}7 &= 7^{\left(7^7\right)\cdot 7} = 7^{(7^8)}.\end{aligned}$$

Damit kann man natürlich auch bei sieben Siebenen die Klammern auf verschiedene Weisen setzen und das gleiche Ergebnis erhalten, zum Beispiel so:

$$\begin{aligned}\big(\big(\big(\big(7\text{^}7\big)\text{^}\big(7\text{^}7\big)\big)\text{^}7\big)\text{^}7\big)\text{^}7 &= 7^{(7^{11})}\\ \big(\big(\big(\big(7\text{^}\big(7\text{^}7\big)\big)\text{^}7\big)\text{^}7\big)\text{^}7\big)\text{^}7 &= 7^{(7^{11})}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe M.3 (4 P.)**.** Vlad möchte einige gleich große Würfel anfertigen. Auf die Seitenflächen der Würfel sollen derart Ziffern geschrieben werden, dass er jede 30-stellige Zahl darstellen kann, indem er 30 Würfel in eine Reihe legt. (Die Zahl soll dann auf der Oberseite der Würfel zu lesen sein.) Welches ist die kleinste Anzahl an Würfeln, mit denen Vlad dies erreichen kann? Hierbei gehen die Ziffern 6 und 9 nicht durch Drehung ineinander über.

Lösung. Es werden 50 Würfel benötigt, um jede 30-stellige Zahl bilden zu können.

Jede Ziffer muss auf 30 Würfeln stehen, damit eine Zahl gelegt werden kann, die nur aus dieser Ziffer besteht, außer der 0, welche nur auf 29 Würfeln stehen muss. Es werden also mindestens $9 \cdot 30 + 1 \cdot 29 = 299$ Würfelseiten benötigt, wofür mindestens 50 Würfel benötigt werden, da $49 \cdot 6 = 294 < 299$.

50 Würfel sind ausreichend, um jede Ziffer auf 30 Würfel zu schreiben. Man erhält solche Würfel, indem man nacheinander jeweils eine Ziffer auf 30 Würfel schreibt, auf denen noch möglichst wenige Seiten belegt sind. Bevor die letzte Ziffer verteilt wird, können nie weniger als 30 Würfel noch freie Felder haben, da sonst auch ein Würfel mindestens 2 freie Felder haben müsste, was der Vorschrift widerspricht, auf Würfel mit möglichst wenigen belegten Seiten zu schreiben.

Steht jede Ziffer auf 30 verschiedenen Würfeln, so kann man jede 30-stellige Zahl bilden, indem man nacheinander für eine Stelle einen beliebigen Würfel mit der gewünschten Ziffer verwendet. An jeder Stelle gibt es noch einen unbenutzten Würfel mit der benötigten Ziffer, da bis dahin noch keine 30 Würfel benutzt wurden. □

Bemerkung. Man kann eine Verteilung der Ziffern auch leicht explizit angeben. Hierfür gibt es etliche verschiedene Möglichkeiten, zum Beispiel kann man auf 5 Würfel die Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5$ schreiben, auf weitere 5 die Ziffern $1, 2, 3, 4, 5, 6$, und so weiter. Oder man schreibt auf 10 Würfel die Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5$, auf 10 weitere die Ziffern $2, 3, 4, 5, 6, 7$ und so weiter.

Aufgabe M.4 (4 P.)**.** Es wird eine positive ganze Zahl vorgegeben. Wenn wir diese um 10% vergrößern, erhalten wir erneut eine ganze Zahl. Ist es möglich, dass dabei die Quersumme um genau 10% kleiner wird?

Lösung. Ja es ist möglich. Wähle zum Beispiel

$$n = 8888888888820.$$

(11 mal tritt hier die 8 auf). Dann ist die Quersumme

$$Q(n) = 11 \cdot 8 + 2 = 90.$$

Vergrößern wir n um 10%, gehen also über zu

$$m = \frac{11}{10} n = 9777777777702,$$

so ist die Quersumme

$$Q(m) = 9 + 10 \cdot 7 + 2 = 81,$$

exakt 90% von 90. □

Bemerkung. Aus den Voraussetzungen folgt, dass sowohl n als auch die Quersumme $Q(n)$ durch 90 teilbar sind: Damit $\frac{11}{10}n$ eine ganze Zahl ist, muss n durch 10 teilbar sein, also $n = 10a$. Entsprechend ist auch $Q(n)$ durch 10 teilbar, also $Q(n) = 10b$. Nach Voraussetzung ist $Q(11a) = 9b$, somit ist $Q(11a)$ – und damit auch $11a$ – durch 9 teilbar. Da 11 und 9 teilerfremd sind, ist a – und damit auch $Q(a) = Q(n)$ – durch 9 teilbar. Somit sind n und $Q(n)$ durch 90 teilbar.

Aufgabe M.5 (5 P.)**.** Im Rhombus $ABCD$ sei $\angle BAD = 120°$. Nun wird ein Punkt M auf der Kante BC sowie ein Punkt N auf der Kante CD gewählt, so dass $\angle MAN = 30°$. Beweise, dass der Mittelpunkt des Umkreises von $\triangle AMN$ auf einer Diagonalen des Rhombus liegt.

Lösung. Zusätzlich zu den in der Aufgabenstellung beschriebenen Punkten bezeichnen wir die Mittelpunkte der Seiten BC und CD mit P beziehungsweise Q (siehe Abbildung 1). Weiter sei X der Schnittpunkt der Diagonalen AC mit der Senkrechten auf AM durch M. Entsprechend sei Y für AN definiert. Wir zeigen, dass $X = Y$; nach dem Strahlensatz schneiden sich dann auch die Mittelsenkrechten auf AM und AN auf der Diagonalen AC, nämlich im Mittelpunkt von $AX = AY$. Da der Umkreismittelpunkt von $\triangle AMN$ dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten entspricht, ist damit gezeigt, dass er auf der Diagonalen AC liegt.

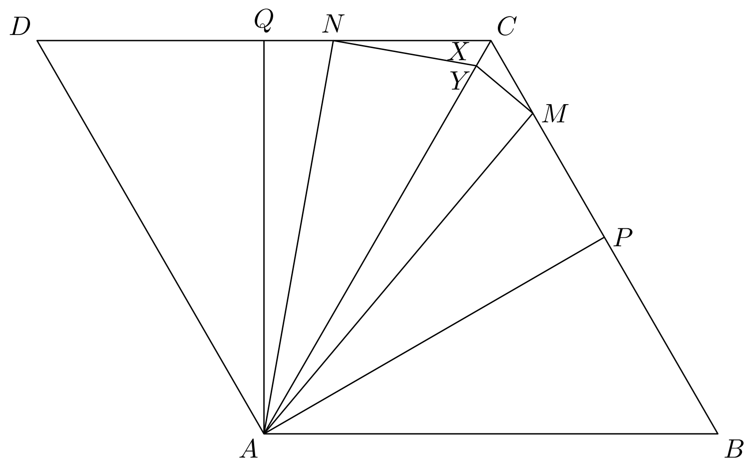

Abbildung 1: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.5.

Im Rhombus $ABCD$ sind nach Voraussetzung die Winkel bei A und C gleich 120°, die Winkel bei B und D entsprechend 60°. Hieraus folgt, dass $\angle CPA$ und $\angle AQC$ rechte Winkel sind. Somit ist $\angle PAC = \angle CAQ = 30°$. Wegen $\angle MAN = 30°$ gilt also $\angle PAM = \angle CAN = \angle YAN$ und $\angle NAQ = \angle MAC = \angle MAX$. Ist einer dieser Winkel 0°, bedeutet dies, dass M oder N mit C zusammen fällt. In diesem Fall gilt aber offensichtlich $X = Y = C$ und wir dürfen daher annehmen, dass beide Winkel größer als 0° sind. Dann sind die Dreiecke $\triangle APM$ und $\triangle ANY$ ähnlich und somit

$$\frac{|AY|}{|AN|} = \frac{|AM|}{|AP|}.$$

Entsprechend sind auch $\triangle AMX$ und $\triangle AQN$ ähnlich und wir haben

$$\frac{|AX|}{|AM|} = \frac{|AN|}{|AQ|}.$$

Wegen $|AP| = |AQ|$ folgt hieraus

$$|AY| = \frac{|AN| \cdot |AM|}{|AP|} = |AX|$$

und somit $X = Y$, wie gewünscht. □

O Oberstufe

Aufgabe O.1 (3 P.)**.** Für die Potenz „a hoch b“ schreiben wir a^b anstelle der üblichen Schreibweise a^b. In dem Ausdruck 7^7^7^7^7^7^7 müssen noch Klammern gesetzt werden, um die Reihenfolge der Rechenoperationen festzulegen, $\big((7\hat{\ }7)\hat{\ }(7\hat{\ }7)\big)\hat{\ }\big((7\hat{\ }7)\hat{\ }7\big)$ wäre eine Möglichkeit. (Es müssen genau 5 Paare von Klammern verwendet werden.) Kann man die Klammern auf zwei unterschiedliche Weisen setzen und dennoch das gleiche Ergebnis herausbekommen?

Lösung. Siehe Lösung von Aufgabe M.2. □

Aufgabe O.2 (4 P.)**.** Es seien mehrere Punkte in der Ebene gegeben, wobei keine drei von ihnen auf einer Geraden liegen. Einige dieser Punkte werden nun derart mit Strecken verbunden, dass jede Gerade, die keinen der Punkte trifft, gerade viele dieser Strecken schneidet. Zeige, dass dann jeder der Punkte Endpunkt einer geraden Anzahl dieser Strecken ist.

Lösung. Falls es einen Punkt P gibt, der Endpunkt einer ungeraden Anzahl von Strecken ist, gibt es auch eine Gerade, die keinen der Punkte trifft und ungerade viele Strecken schneidet:

Sei g eine Gerade durch P, die keinen der anderen Punkte enthält. d sei kleiner als der kleinste Abstand von g zu einem der anderen Punkte. g_1 und g_2 seien die beiden zu g parallelen Geraden mit Abstand d zu g. Dann schneiden die Strecken, deren Endpunkte von P verschieden sind, entweder beide Geraden g_1 und g_2 oder keine von beiden, andernfalls müsste ein Endpunkt einer solchen Strecke zwischen g_1 und g_2 liegen.

Auf einer Seite von g liegen gerade viele Strecken mit P als Endpunkt, auf der anderen Seite ungerade viele. Da g_1 die an P grenzenden Strecken auf der einen Seite von g und g_2 die auf der anderen Seite schneidet, werden insgesamt entweder von g_1 oder von g_2 eine ungerade Anzahl von Strecken geschnitten. □

Aufgabe O.3. Für jede positive ganze Zahl n bezeichnen wir mit $O(n)$ ihren größten ungeraden Teiler. Für beliebige positive ganze Zahlen $x_1 = a$ und $x_2 = b$ wird nun eine unendliche Folge von positiven ganzen Zahlen durch die folgende Regel erzeugt: $x_n = O(x_{n-1} + x_{n-2})$ für $n = 3, 4, \ldots$

(a) (2 P.) Zeige, dass ab irgendeiner Stelle alle Folgenglieder den gleichen Wert haben.

(b) (2 P.) Wie kann dieser Wert berechnet werden, wenn a und b bekannt sind?

Lösung. (a) Für $n > 2$ ist x_n ungerade, daher ist für $n > 2$ die Summe $x_n + x_{n+1}$ gerade, also $x_{n+2} \leq \frac{1}{2}\big(x_n + x_{n+1}\big)$, insbesondere $x_{n+2} \leq \max(x_n, x_{n+1})$. Da wiederum x_{n+3} nicht größer als das Maximum von x_{n+2} und x_{n+1} ist und so weiter, folgt jeweils $x_k \leq \max(x_n, x_{n+1})$ für $k \geq n+2$. Ist $x_n = x_{n+1}$, so ist die Folge von dieser Stelle an konstant. Wir können also annehmen, dass dies nicht der Fall ist. Dann gilt sogar $x_k < \max(x_n, x_{n+1})$ für $k \geq n+2$. Weil alle Folgenglieder positiv sind, nehmen die x_n nur endlich viele verschiedene Werte an. Da es unendlich viele Folgenglieder gibt, muss (mindestens) ein Wert unendlich häufig angenommen werden, sei z der größte dieser Werte. Dann gibt es ein n mit $x_n = z$, so dass von nun an keine größeren Werte als z angenommen werden. Ist nun $x_{n+1} \neq z$, so haben wir $x_{n+1} < x_n$ und daher $x_m < x_n = z$ für alle $m > n$. Da dies im Widerspruch dazu steht, dass der Wert z unendlich oft angenommen wird, gilt also $x_{n+1} = x_n$. Daher ist die Folge von der Stelle n an konstant.

(b) Es handelt sich dabei um den größten gemeinsamen ungeraden Teiler u von a und b, also $u = O(\mathrm{ggT}(a,b)) = \mathrm{ggT}(O(a), O(b))$.

Jedes Folgenglied ist durch u teilbar. Denn wenn x_n und x_{n+1} durch u teilbar sind, ist auch $x_n + x_{n+1}$ durch u teilbar. Da u ungerade ist, ist dann auch $O(x_n + x_{n+1})$ Vielfaches von u.

Jede ganze Zahl z, die für irgendein $n \geq 2$ sowohl x_n als auch x_{n+1} teilt, muss ein Teiler von u sein. Denn es ist klar, dass z ungerade sein muss. Des Weiteren folgt, dass auch schon x_{n-1} ein Vielfaches von z ist: Wenn z Teiler von $x_{n+1} = O(x_{n-1} + x_n)$ ist, teilt z auch $x_{n-1} + x_n$. Da auch x_n Vielfaches von z ist, folgt, dass z ein Teiler von x_{n-1} sein muss. Genauso folgt dann, dass x_{n-2} ein Vielfaches von z ist und so weiter, schließlich erhält man, dass schon a und b Vielfache von z sein müssen.

Zusammen mit dem ersten Aufgabenteil folgt daraus, dass ab irgendeiner Stelle alle Folgenglieder den Wert u haben.

□

Aufgabe O.4 (4 P.)**.** Mehrere Nullen und Einsen werden in einer Reihe aufgeschrieben. In dieser Reihe betrachten wir solche Paare von (nicht notwendigerweise benachbarten) Ziffern, bei denen die linke Ziffer 1 und die rechte 0 ist. Sei M die Anzahl derjenigen solcher Paare, für welche zwischen der 1 und der 0 eine gerade Anzahl von Ziffern (möglicherweise auch keine) liegt. Entsprechend sei N die Anzahl derjenigen Paare, für welche zwischen der 1 und der 0 eine ungerade Anzahl von Ziffern liegt. Zeige, dass $M \geq N$.

Lösung. Die Anzahl der Ziffern zwischen zwei Ziffern der Reihe nennen wir ihren *Abstand* in der Reihe. Angenommen, in der Reihe stehen irgendwo zwei Einsen nebeneinander. Beide Einsen bilden mit den gleichen Nullen Paare, und ist der Abstand der einen 1 zu einer solchen 0 gerade, so ist der der anderen 1 zur gleichen 0 ungerade. Insgesamt gibt es daher unter den Paaren, die eine dieser Einsen enthalten, ebenso viele mit geradem wie mit ungeradem Abstand. Entfernen wir nun die beiden Einsen aus der Reihe, so verlieren wir die Paare, in denen sie enthalten waren. Außerdem ändern wir für andere Paare den Abstand. Da die beiden Einsen nebeneinander standen, ändern wir den Abstand eines Paares entweder gar nicht oder um genau 2, wenn wir die beiden Einsen entfernen. Der Abstand bleibt also gerade, wenn er gerade war, und ungerade, wenn er ungerade war.

Wir können somit nebeneinander stehende Einsen (und analog auch Nullen) aus der Reihe entfernen und verändern dabei M und N jeweils um den gleichen Wert. Wiederholen wir diesen Vorgang nun so lange, bis keine zwei Einsen oder Nullen mehr nebeneinander stehen, haben wir in jedem Schritt M und N um den jeweils gleichen Wert verringert. Gilt jetzt also $M \geq N$, so galt es auch bei der ursprünglichen Reihe. Da die entstandene Reihe abwechselnd aus Nullen und Einsen besteht (möglicherweise ist sie auch ganz leer, falls wir nach und nach alle Ziffern entfernt haben), hat jede 1 zu jeder 0 einen geraden Abstand. Somit ist $N = 0$ und daher $M \geq N$. □

Aufgabe O.5 (4 P.)**.** Es sei X ein beliebiger Punkt im Inneren eines (nicht notwendigerweise regelmäßigen) Tetraeders. Durch jede Ecke des Tetraeders zeichnen wir eine Gerade parallel zur Geraden durch X und den Schwerpunkt der Seitenfläche, die der Ecke gegenüber liegt. (Der Schwerpunkt eines Dreiecks ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.) Zeige, dass sich diese vier Geraden in einem Punkt schneiden.

Lösung. Die Ecken des Tetraeders seien A, B, C und D. Mit M_{AB} bezeichnen wir den Mittelpunkt der Kante AB, entsprechend auch für die anderen Kanten. Weiter sei S_A der Schwerpunkt der Seitenfläche $\triangle BCD$, entsprechend für die anderen Seitenflächen.

Zunächst zeigen wir, dass die Strecken AS_A, BS_B, CS_C und DS_D sich in einem Punkt schneiden. Hierzu betrachten wir das Dreieck $\triangle ABM_{CD}$ (siehe Abbildung 2). Da die Seitenhalbierende AM_{CD} des Dreiecks $\triangle ACD$ eine Kante

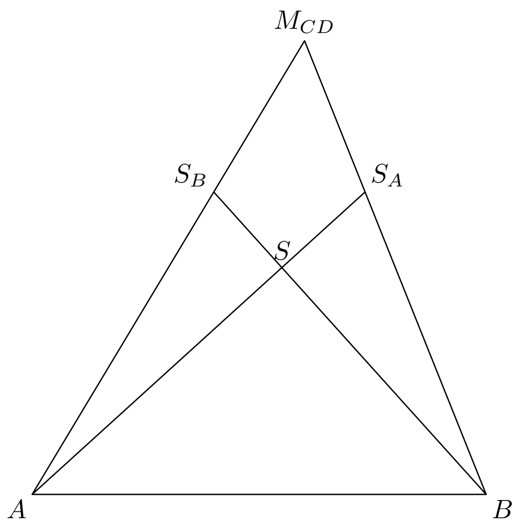

Abbildung 2: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.5.

von $\triangle ABM_{CD}$ ist, liegt S_B auf dieser Kante. Ebenso liegt S_A auf der Kante BM_{CD}. Daher verlaufen die Strecken AS_A und BS_B in der Ebene dieses Dreiecks und haben also einen Schnittpunkt S. Wir behaupten, dass $|AS| = 3\,|S_AS|$ gilt. Betrachten wir dann entsprechend die Dreiecke $\triangle ACM_{BD}$ und $\triangle ADM_{BC}$, erhalten wir analog, dass CS_C sowie DS_D die Strecke AS_A in einem Punkt schneiden, der AS_A im gleichen Verhältnis teilt, weswegen sich alle vier Strecken in S schneiden.

Um $|AS| = 3\,|S_AS|$ zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass $|AS_B| = 2\,|S_BM_{CD}|$ und $|BS_A| = 2\,|S_AM_{CD}|$ gilt, da bekanntermaßen der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1 : 2 teilt. Sei nun F der Flächeninhalt von $\triangle ABM_{CD}$. Dann haben $\triangle ABS_A$ und $\triangle ABS_B$ jeweils den Flächeninhalt $\frac{2}{3}F$, sowie $\triangle AS_AM_{CD}$ und $\triangle BM_{CD}S_B$ jeweils den Flächeninhalt $\frac{1}{3}F$. Hieraus folgt, dass $\triangle ASS_B$ und $\triangle BS_AS$ den gleichen Flächeninhalt haben, nennen wir ihn F'. Da $\triangle S_AM_{CD}S$ genau halb so groß ist wie $\triangle BS_AS$ (und entsprechend $\triangle M_{CD}S_BS$ halb so groß wie $\triangle S_BAS$), hat auch das Viereck $SS_AM_{CD}S_B$ den Flächeninhalt F'. Der Flächeninhalt von $\triangle AS_AM_{CD}$ ist also einerseits $\frac{1}{3}F$, andererseits $2F'$. Also ist $F' = \frac{1}{6}F$. Hieraus folgt, dass $\triangle ABS$ den Flächeninhalt $F - 3F' = \frac{1}{2}F$ hat, also genau drei mal so groß ist wie $\triangle BS_AS$. Da diese beiden Dreiecke die Seite BS gemeinsam haben, folgt $|AS| = 3\,|S_AS|$, wie behauptet.

Also treffen sich die Strecken AS_A, BS_B, CS_C und DS_D im Punkt S. Im Fall $X = S$ ist daher nichts weiter zu beweisen. Für $X \neq S$ sei Z der Punkt, der entsteht, wenn wir X an S spiegeln und um den Faktor 3 strecken. Mit anderen Worten, Z liegt auf der Geraden durch X und S, so dass S zwischen X und Z liegt und $|ZS| = 3\,|XS|$ gilt. Wir behaupten, dass die konstruierten Parallelen zu XS_A, XS_B, XS_C und XS_D sich in Z schneiden.

Hierzu betrachten wir die Punkte A, S, S_A, X und Z (siehe Abbildung 3). Wegen $\frac{|AS|}{|S_AS|} = \frac{|ZS|}{|XS|} = 3$ folgt aus dem Strahlensatz, dass die Geraden durch

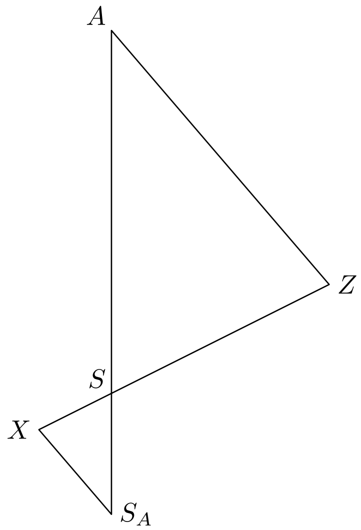

Abbildung 3: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.5.

A und Z sowie durch X und S_A parallel sind. Daher verläuft die konstruierte Gerade durch A durch Z. Da dies für die anderen Ecken ebenso gilt, schneiden sich alle vier Geraden in Z. □

Fragen und Anmerkungen. Schicken Sie diese bitte an *Städtewettbewerb Mathematik Hamburg* <stw.m.hh@gmail.com>. An den Lösungen haben mitgewirkt: Thomas Kecker, Prof. Dr. Helmut Müller, Mara Sommerfeld, Philipp Sprüssel und Jan Henrik Sylvester.