Städtewettbewerb Frühjahr 2011
Lösungsvorschläge

Hamburg

31. März 2011 [Version 21. April 2011]

M Mittelstufe

Aufgabe M.1 (3 P.)**.** Auf eine Kreislinie sind die Zahlen von 1 bis 2010 in irgendeiner Reihenfolge geschrieben. Dabei werden die Zahlen im Uhrzeigersinn gesehen immer abwechselnd größer beziehungsweise kleiner. Zeige, dass es immer zwei benachbarte Zahlen mit gerader Differenz gibt.

LÖSUNG. Die Zahlen werden abwechselnd größer und kleiner. Daher hat jede zweite Zahl jeweils zwei kleinere Nachbarn. Damit alle Differenzen benachbarter Zahlen ungerade sind, müssen abwechselnd gerade und ungerade Zahlen auf dem Kreis liegen. Wären nun die Zahlen mit den kleineren Nachbarn die geraden Zahlen, so würde dies zu einem Widerspruch führen, da die Zahl 2 keine zwei kleineren Nachbarn haben kann. Wären die Zahlen mit den kleineren Nachbarn die ungeraden Zahlen, so würde dies ebenfalls zu einem Widerspruch führen, da die Zahl 1 keine zwei kleineren Nachbarn haben kann. Also gibt es keine Möglichkeit die Zahlen von 1 bis 2010 so auf einem Kreis anzuordnen, dass die Zahlen jeweils abwechselnd größer und kleiner werden und ihre Differenzen stets ungerade sind. □

Aufgabe M.2 (4 P.)**.** Ein Rechteck sei durch 10 horizontale und 10 vertikale Geraden in 121 rechteckige Zellen aufgeteilt, so dass 111 dieser Zellen einen ganzzahligen Umfang haben. Zeige, dass auch die restlichen 10 Zellen einen ganzzahligen Umfang haben.

LÖSUNG. Wir überzeugen uns zuerst davon, dass in einem zwei Zellen hohen und zwei Zellen breiten Rechteck, in dem drei Zellen einen ganzzahligen Umfang haben, auch die vierte Zelle einen ganzzahligen Umfang hat. Sind nämlich die horizontalen Seitenlängen der Zellen a, b, die vertikalen x, y, so sind zum Beispiel nach Voraussetzung die Umfänge $2a+2x$, $2b+2x$ und $2a+2y$ ganzzahlig. Dann ist auch der Umfang der übrigen Zelle

$$2b + 2y = (2b + 2x) + (2a + 2y) - (2a + 2x)$$

ganzzahlig.

Da alle bis auf zehn Zellen ganzzahligen Umfang haben, es aber elf Zeilen gibt, gibt es eine Zeile aus lauter Zellen mit ganzzahligem Umfang. In jeder benachbarten Zeile gibt es mindestens eine Zelle mit ganzzahligem Umfang, also haben auch deren (horizontale) Nachbarn nach dem obigen Argument ganzzahligen Umfang und damit die Zellen der gesamten Zeile. Mit demselben Argument gilt dies auch für alle weiteren Zeilen. □

Aufgabe M.3 (5 P.)**.** Ein ausgewachsener Wurm ist 1 Meter lang. Einen ausgewachsenen Wurm kann man in zwei Teile zerschneiden (mit beliebigem Längenverhältnis), so dass zwei neue Würmer entstehen. Beide Würmer wachsen nun sofort mit einer Geschwindigkeit von einem Meter pro Stunde. Sobald ein Wurm eine Länge von 1 Meter erreicht hat, hört er zu wachsen auf und ist somit ausgewachsen. (Erst jetzt kann man ihn zerscheiden.) Wenn man mit einem einzigen ausgewachsenen Wurm beginnt, kann man nach weniger als einer Stunde 10 ausgewachsene Würmer haben?

Lösung. Siehe Lösung von Aufgabe O.2. □

Aufgabe M.4 (5 P.)**.** Es sei ein konvexes Viereck gegeben. Jede Diagonale zerteile es in zwei gleichschenklige Dreiecke, beide Diagonalen gemeinsam zerteilen es in vier gleichschenklige Dreiecke. Ist dieses Viereck zwangsläufig ein Quadrat?

Lösung. Das Viereck ist nicht zwangsläufig ein Quadrat, man kann nämlich ein gleichschenkliges Trapez mit den Winkel wie in Abbildung 1 konstruieren, das die gewünschte Eigenschaft hat. Man beginne dazu mit einem der kleinen Dreiecke und setze die weiteren daran. Nebeneinanderliegende Winkel „in der Mitte“ ergänzen sich zu 180°, also ergibt sich ein Viereck mit Diagonalen.

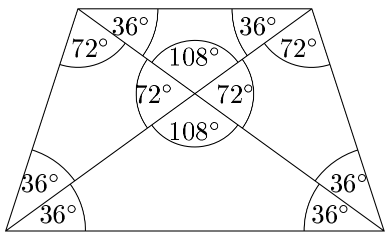

Abbildung 1: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.4.

Bemerkung: Die Winkel ergeben sich als $\frac{180°}{5} = 36°$, $\frac{2\cdot180°}{5} = 72°$ und $\frac{3\cdot180°}{5} = 108°$. □

Aufgabe M.5. Ein Drache hält einen Ritter gefangen und hat ihm 100 Münzen gegeben, von denen die Hälfte magisch sind. (Der Ritter kann zwar die einzelnen Münzen voneinander unterscheiden, aber nur der Drache weiß, welche Münzen magisch sind.) Jeden Tag teilt der Ritter die Münzen in zwei Stapel auf (nicht unbedingt gleich große). Sollten dabei in beiden Stapeln gleich viele magische Münzen oder gleich viele gewöhnliche Münzen sein, wird der Drache den Ritter frei lassen. Kann der Ritter sicherstellen, nach höchstens

(a) (2 P.) 50 Tagen

(b) (3 P.) 25 Tagen

seine Freiheit zu erlangen?

LÖSUNG. (a) Der Ritter bildet am ersten Tag zwei Stapel mit je 50 Münzen. Er nummeriert die Münzen in beiden Stapeln und tauscht in den folgenden Tagen der Nummerierung nach immer zwei Münzen der beiden Stapel. Es wird gezeigt, dass er mit diesem Vorgehen innerhalb von 50 Tagen freikommt.

Wenn er am ersten Tag noch nicht freikommt, gibt es im ersten Stapel von einer Münzsorte weniger Münzen als im zweiten Stapel, man kann (ohne Einschränkung) annehmen, dass dies die magischen sind.

Angenommen der Ritter tauschte 50 mal, dann wären die Stapel vollständig vertauscht und der zweite enthielte somit weniger magische Münzen als der erste. Da der Ritter immer nur eine Münze getauscht hat und die Gesamtzahl an magischen Münzen gerade ist, waren zwischendurch in beiden Stapeln gleich viele magische Münzen. Da dies bereits vor dem 50sten Tauschvorgang passiert ist, kann der Ritter mit dem Vorgehen innerhalb von 50 Tagen freikommen.

(b) Am ersten Tag teilt der Ritter die Münzen in einen Stapel A von 25 und einen Stapel B von 75 Münzen auf. Sind in A nur Münzen einer Sorte, so kommt er frei, ansonsten packt er jeden weiteren Tag eine Münze von B auf A. Da auf diese Weise nach 25 Tagen A aus 49 und B aus 51 Münzen bestünde, müsste dann in A eine der zwei Münzsorten mit mindestens 25 Münzen vertreten sein, sagen wir (ohne Einschränkung) die magische Sorte.

Da A aber zu Anfang keine 25 magischen Münzen enthielt und jeden Tag nur eine Münze von A nach B bewegt wurde, waren irgendwann einmal genau 25 magische Münzen in A und damit auch 25 magische Münzen in B und der Ritter kam frei. □

O Oberstufe

Aufgabe O.1 (3 P.). Die Seitenflächen eines konvexen Polyeders seien Dreiecke und alle zueinander ähnlich. Zeige, dass es zwei Paare kongruenter Seitenflächen gibt (zwei zueinander kongruente Seitenflächen und zwei weitere zueinander kongruente Seitenflächen).

LÖSUNG. Man betrachte die kürzeste Kante (bzw. eine der kürzesten Kanten) des Polyeders. Die beiden daran angrenzenden Seitenflächen sind kongruent, da es ähnliche Dreiecke sind, deren kürzeste Seitenlängen übereinstimmen.

Dieselbe Argumentation trifft auch für die längste Kante zu. Falls die beiden an die längste Kante angrenzenden Seitenflächen von denen an der kürzesten Kante verschieden sind, haben wir unsere zwei Paare kongruenter Seitenflächen gefunden.

An der kürzesten Kante befinden sich die kleinsten der ähnlichen Dreiecke, an der längsten die größten. Grenzt eine Seitenfläche sowohl an die kürzeste als auch an die längste Polyederkante, sind die kleinsten der ähnlichen Dreiecke und die größten kongruent. Folglich sind alle Dreiecke kongruent und da es mindestens vier Seitenflächen gibt, gibt es auch zwei Paare kongruenter Seitenflächen. □

Aufgabe O.2 (4 P.). Ein ausgewachsener Wurm ist 1 Meter lang. Einen ausgewachsenen Wurm kann man in zwei Teile zerschneiden (mit beliebigem Längenverhältnis), so dass zwei neue Würmer entstehen. Beide Würmer wachsen nun sofort mit einer Geschwindigkeit von einem Meter pro Stunde. Sobald ein Wurm eine Länge von 1 Meter erreicht hat, hört er zu wachsen auf und ist somit ausgewachsen. (Erst jetzt kann man ihn zerscheiden.) Wenn man mit einem einzigen ausgewachsenen Wurm beginnt, kann man nach weniger als einer Stunde 10 ausgewachsene Würmer haben?

LÖSUNG. Ja, es ist möglich den Wurm so zu zerteilen, dass man nach einer Stunde 10 ausgewachsene Würmer hat. Man trenne von einem Wurm Teile der folgenden Längen zu den folgenden Zeitpunkten ab:

Länge in mm	1	2	4	8	16	32	64	128	256
Zeitpunkt in $\frac{1}{1000}$ Stunden	0	1	3	7	15	31	63	127	257

Die Würmer wachsen mit 1 m pro Stunde, also um 1 mm in $\frac{1}{1000}$ Stunde. Der größere Teil des ersten Wurms ist bei der zweiten Trennung also gerade wieder ausgewachsen. Dadurch, dass sich die Zeitabstände immer verdoppeln, genau wie die Längen der abgeschnittenen Teile, wächst der größere Teil jedes Mal wieder aus, bevor ein neuer Teil abgeschnitten wird.

Die kleineren Würmer sind bei der nächsten Abtrennung jeweils so groß, wie der neue kleinere abgetrennte Teil: Nach $\frac{1}{1000}$ Stunde wächst der erste von 1 mm auf 2 mm, danach verdoppeln sich die Längen der kleineren Würmer, genau wie die Zeitintervalle. Wächst also der erste kleinere Teil aus, wachsen sämtliche kleineren Teile aus und auch der größere nach der letzten Trennung. Der erste kleinere Teil wächst innerhalb der Stunde aus, da er bereits 1 mm groß ist und mit 1 m pro Stunde wächst.

Bemerkung: Trennt man zu Beginn ein noch kürzeres Stück ab und wählt auch das erste Zeitintervall entsprechend kürzer, kann man jede beliebige Anzahl an Würmern erreichen.

□

Aufgabe O.3 (4 P.). Entlang einer Kreislinie werden 100 weiße Steine platziert. Außerdem sei eine ganze Zahl k mit $1 \leq k \leq 50$ vorgegeben. In jedem Zug können wir nun k aufeinander folgende Steine auswählen, so dass der erste und letzte dieser Steine weiß sind, und diese beiden Steine schwarz anmalen. Für welche k kann man mit einigen dieser Züge alle 100 Steine schwarz anmalen?

LÖSUNG. Es wird gezeigt, dass man die Steine genau dann alle schwarz anmalen kann, wenn 4 kein Teiler von $k-1$ ist (Schreibweise: $4 \nmid k-1$).

Startet man an einem beliebigen Stein und betrachtet jeden $k-1$-ten Stein, bis man wieder beim ursprünglichen angekommen ist, so sei dies eine *Klasse* von Steinen. Von den Steinen einer Klasse kann man immer zwei aufeinanderfolgende gleichzeitig schwarz färben. Ein Stein einer anderen Klasse, also jeder $k-1$-te Stein beginnend mit einem Stein, der nicht in der ersten Klasse enthalten ist, kann nicht im gleichen Zug mit Steinen der ersten Klasse schwarz angemalt werden.

Enthält eine Klasse ungerade viele Steine, können daher nicht alle Steine dieser Klasse angemalt werden. Bei gerade vielen Steinen in einer Klasse kann man alle diese Steine anmalen, indem man zuerst einen Stein der Klasse und seinen „Nachfolger“, den Stein in der Entfernung $k-1$ im Uhrzeigersinn, anmalt, dann den Nachfolger des Nachfolgers gemeinsam mit dessen Nachfolger und so weiter. Es können also genau dann alle Steine schwarz angemalt werden, wenn alle Klassen gerade viele Steine enthalten.

Die Anzahl der Steine einer Klasse entspricht genau der Anzahl der Schritte der Länge $k-1$, die man beim oben beschriebenen Vorgehen machen musste, um erstmals wieder beim ersten Stein anzugelangen. Gesucht ist also die kleinste positive ganze Zahl n, für die n Schritte der Länge $k-1$ einer ganzen Anzahl an „Runden“ entspricht, also $100 \mid n(k-1)$. Ist $4 \mid k-1$, so ist dieses n ungerade, denn für gerades n gälte dann auch $100 \mid \frac{n}{2}(k-1)$. Ist hingegen $4 \nmid k-1$, so ist n gerade. Also genau wenn $4 \nmid k-1$, dann bestehen alle Klassen aus gerade vielen Steinen und somit kann man genau dann alle Steine schwarz anmalen. □

Aufgabe O.4 (5 P.). In einem konvexen Fünfeck zeichnen wir von jeder Ecke aus die Senkrechte zur jeweils gegenüberliegenden Seite. Zeige: Schneiden sich vier dieser Senkrechten in einem Punkt, dann verläuft auch die fünfte Senkrechte durch diesen Punkt.

Lösung. Das Fünfeck sei $ABCDE$, zu den Eckpunkten seien A', B', C', D' bzw. E' die Fußpunkte der Senkrechten auf die gegenüberliegenden Seiten. Ohne Einschränkung treffen sich AA', CC', DD' und EE' im Punkt S. B'' sei der Schnittpunkt von BS mit DE, siehe Abbildung 2. Es soll nun gezeigt werden,

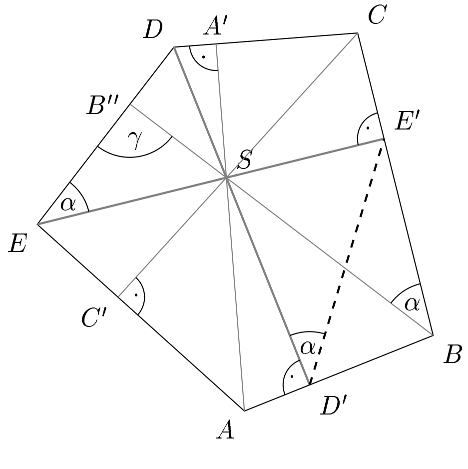

Abbildung 2: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.4.

dass $\angle EB''B$ ein rechter Winkel ist, denn dann ist $B'' = B'$ und der Beweis erbracht, dass BB' durch S geht.

Die Dreiecke $\Delta ESC'$ und $\Delta CSE'$ haben den gleichen Winkel bei S und je einen rechten Winkel bei C' bzw. E', also sind sie ähnlich. Entsprechend ist jedes Dreieck bestehend aus S, einem Fußpunkt und einem Fünfeckseckpunkt auf der gleichen Seite mit dem Fußpunkt ähnlich zum bezüglich S gegenüberliegenden Dreieck.

Es gilt also

$$\frac{|ES|}{|C'S|} = \frac{|CS|}{|E'S|}, \quad \frac{|C'S|}{|AS|} = \frac{|A'S|}{|CS|} \quad \text{und} \quad \frac{|AS|}{|D'S|} = \frac{|DS|}{|A'S|}.$$

Multipliziert man jeweils die linken und rechten Seiten der Gleichungen, erhält man

$$\frac{|ES|}{|D'S|} = \frac{|DS|}{|E'S|}, \quad \text{also} \quad \frac{|ES|}{|DS|} = \frac{|D'S|}{|E'S|}.$$

Da der Winkel bei S wieder übereinstimmt, sind also auch die Dreiecke ΔDSE und $\Delta E'SD'$ ähnlich, also ist $\angle SED = \angle E'D'S$.

Da $D'BE'S$ auf Grund der zwei gegenüberliegenden rechten Winkel ein Sehnenviereck ist, ist $\angle E'D'S = \angle E'BS$ (über der Sehne $E'S$). Also ist auch $\angle SED = \angle E'BS$.

Die Dreiecke $\Delta EB''S$ und $\Delta BE'S$ haben zusätzlich einen gleichen Winkel bei S, sind also ähnlich. Damit ist $\angle EB''S$ ein rechter Winkel und $B'' = B'$. □

Aufgabe O.5 (5 P.). In einem Land gibt es 100 Städte und irgendeine Anzahl an Straßen. Jede Straße verbindet zwei Städte, wobei sich keine Straßen schneiden. Jede Stadt sei von jeder anderen Stadt aus entlang der Straßen erreichbar. Zeige, dass man einige Straßen zu Hauptstraßen erklären kann, so dass sich an jeder Stadt eine ungerade Anzahl von Hauptstraßen treffen.

LÖSUNG. Zunächst suchen wir eine beliebige Stadt aus und erklären sie zur Hauptstadt. Für jede Stadt sei die *Entfernung* zur Hauptstadt die geringste Anzahl an Straßen, die man durchlaufen muss, um von dieser Stadt zur Hauptstadt zu gelangen. Die Hauptstadt selbst hat also Entfernung 0 zu sich, alle durch eine Straße direkt mit ihr verbundenen Städte haben Entfernung 1, alle mit einer solchen Stadt (aber nicht mit der Hauptstadt) direkt durch eine Straße verbundenen Städte haben Entfernung 2 und so weiter. Jede Stadt (außer der Hauptstadt) hat offensichtlich eine Straße zu einer Stadt geringerer Entfernung von der Hauptstadt.

Sei n die größte Entfernung zur Hauptstadt, die unter allen 100 Städten auftritt. Jede Stadt der Entfernung n hat (mindestens) eine Straße, die zu einer Stadt der Entfernung $n-1$ zur Hauptstadt führt. Für jede Stadt der Entfernung n suchen wir uns eine solche Straße aus und erklären sie zur Hauptstraße. Nun betrachten wir alle Städte der Entfernung $n-1$. Falls an einer solchen Stadt gerade viele der im ersten Schritt benannten Hauptstraßen enden, wählen wir eine beliebige Straße zu einer Stadt der Entfernung $n-2$ aus und erklären diese zur Hauptstraße. Nun kommen die Städte der Entfernung $n-2$ an die Reihe und so weiter, bis wir schließlich auch die Städte der Entfernung 1 betrachtet haben und somit nur noch die Hauptstadt übrig bleibt. An allen Städten außer der Hauptstadt treffen sich ungerade viele Hauptstraßen, wir müssen also nur noch zeigen, dass dies auch für die Hauptstadt der Fall ist.

Notieren wir für jede Stadt die Anzahl der sich dort treffenden Hauptstraßen und addieren wir diese 100 Zahlen, dann haben wir jede Hauptstraße zweimal gezählt, für jedes ihrer beiden Enden einmal. Also ist diese Summe eine gerade Zahl. Da 99 der summierten Zahlen ungerade sind, muss auch die letzte Zahl – die Anzahl der sich an der Hauptstadt treffenden Hauptstraßen – ungerade sein. Also treffen sich an jeder Stadt ungerade viele Hauptstraßen. □

Fragen und Anmerkungen. Schicken Sie diese bitte an *Städtewettbewerb Mathematik Hamburg* <stw.m.hh@gmail.com>. An den Lösungen haben mitgewirkt: Oliver Ebsen, Prof. Dr. Helmut Müller, Deniz Sarikaya, Mara Sommerfeld, Philipp Sprüssel und Jan Henrik Sylvester.