M Mittelstufe

Aufgabe 1 (3 P.)**.** Ein Schatz ist unter einem Feld eines 8×8-Bretts vergraben. Unter jedem anderen Feld liegt eine Nachricht, welche die minimale Anzahl an Schritten angibt, die benötigt wird, um das Feld mit dem Schatz zu erreichen. (Hierbei führt ein Schritt stets auf ein Feld, das eine gemeinsame Seite mit dem Ausgangsfeld hat.) Welches ist die minimale Anzahl an Feldern, unter denen man graben muss, damit man den Schatz sicher erhält?

Aufgabe 2 (4 P.)**.** Gibt es eine positive ganze Zahl mit einer ungeraden Anzahl an geraden positiven Teilern und einer geraden Anzahl an ungeraden positiven Teilern?

Aufgabe 3 (4 P.)**.** Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm. Die Inkreise der Dreiecke ΔABC und ΔCDA berühren die Diagonale AC im Punkt X bzw. Y. Die Inkreise der Dreiecke ΔBCD und ΔDAB berühren die Diagonale BD im Punkt Z bzw. T. Beweise, dass die Punkte X, Y, Z und T Ecken eines Rechtecks sind, sofern sie (paarweise) verschieden sind.

Aufgabe 4. Im Ausdruck

$$10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1$$

werden so Klammern gesetzt, dass das Ergebnis eine ganze Zahl ist.

(a) (2 P.) Was ist der maximal mögliche Wert dieser ganzen Zahl?

(b) (3 P.) Was ist der minimal mögliche Wert dieser ganzen Zahl?

Aufgabe 5 (5 P.)**.** Rhinos Haut hat vertikale und horizontale Falten an seinen Seiten, insgesamt 17. Wenn Rhino eine seiner Seiten an einem Baum kratzt, verschwinden entweder zwei horizontale oder zwei vertikale Falten an dieser Seite, aber zwei neue Falten entstehen an der anderen, und zwar eine horizontale und eine vertikale. (Falls es an der Seite, an der er sich kratzt, weniger als zwei horizontale und weniger als zwei vertikale Falten gibt, passiert nichts.) Kann es passieren, dass auf jeder Seite die Anzahl an vertikalen und horizontalen Falten vertauscht sind, nachdem Rhino sich einige Male gekratzt hat?

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden. Viel Erfolg!

33. Internationaler Städtewettbewerb Mathematik — 22. März 2012
Frühjahrsrunde — Hamburg

O Oberstufe

Aufgabe 1 (4 P.). Von jeder Ecke eines konvexen Polyeders gehen genau drei Kanten aus und mindestens zwei von ihnen haben die gleiche Länge. Beweise, dass das Polyeder mindestens drei gleich lange Kanten hat.

Aufgabe 2 (4 P.). In die Felder eines $2n$-Streifens werden Zahlen auf folgende Weise geschrieben:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ -n,\ \ldots,\ -2,\ -1$$

Ein Spielstein bewegt sich entlang des Streifens: Jedes Mal bewegt er sich um die Anzahl Felder, die das aktuelle Feld angibt, und zwar nach rechts für positive Zahlen und nach links für negative. Es ist bekannt, dass sich der Spielstein von jeder Anfangsposition durch alle Felder des Streifens bewegt. Beweise, dass $2n+1$ eine Primzahl ist.

Aufgabe 3 (5 P.). Von den Graphen von $y = \cos x$ und $x = 100\cos(100y)$ werden die Schnittpunkte markiert, deren Koordinaten beide positiv sind. Sei a die Summe der x-Koordinaten dieser Punkte und b die Summe der y-Koordinaten. Bestimme $\frac{a}{b}$.

Bemerkung: Das Argument des Kosinus wird im Bogenmaß angegeben. Ein Winkel von $360°$ entspricht im Bogenmaß 2π.

Aufgabe 4 (5 P.). Ein Viereck $ABCD$ ohne parallele Seiten sei in einen Kreis einbeschrieben. X sei ein Berührpunkt zweier Kreise mit Sehnen AB bzw. CD. Beweise, dass alle solchen Punkte X auf einem Kreis liegen.

Aufgabe 5 (5 P.). Ein weißer Turm steht auf dem Feld B2 und ein schwarzer Turm auf dem Feld C4 eines 8×8-Schachbretts. Zwei Spieler bewegen jeweils ihren Turm abwechselnd, wobei der weiße Turm anfängt. Die Spieler dürfen auf kein Feld ziehen, das gerade vom anderen Turm bedroht wird oder das vorher schon einmal einer der Türme besucht hat. Ein Spieler verliert, wenn er nicht mehr ziehen kann. Für welchen Spieler gibt es eine Gewinnstrategie (unabhängig von den Zügen des Gegners)?

(Ein Turm bewegt sich immer eine beliebige Anzahl an Feldern entlang einer horizontalen oder vertikalen Linie. Nur das erste und letzte Feld eines Zuges gilt als besucht.)

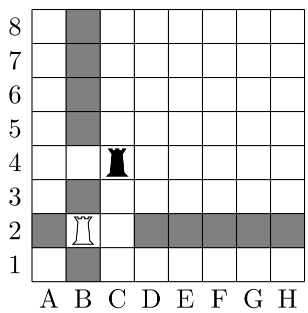

Abbildung 1: Anfangsposition der Türme in Aufgabe 5 und erlaubte Züge (grau) für den weißen Turm.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden. — Viel Erfolg!