Städtewettbewerb Herbst 2012 Lösungsvorschläge

Hamburg

23. Oktober 2012 [Version 10. April 2013]

M Mittelstufe

Aufgabe M.1 (4 P.). In der Dezimaldarstellung einer Zahl kommen nur zwei verschiedene Ziffern vor. Die Zahl ist mindestens 10 Ziffern lang und je zwei benachbarte Ziffern sind unterschiedlich. Welches ist die größte Zweierpotenz, durch die eine solche Zahl teilbar sein kann?

Lösung. Die größte Zweierpotenz, durch die eine solche Zahl teilbar sein kann, ist 64: Ein Beispiel, für ein solches Vielfaches von 64 ist

$$6464646464 = 64 \cdot 101010101.$$

Wir zeigen nun, dass keine solche Zahl durch 128 teilbar sein kann. Wenn x für die vorletzte und y für die letzte Ziffer einer solchen Zahl steht, ist die Zahl entweder von der Form $xyxy \cdots xy$ oder $yxy \cdots xy$. (Dabei stehen Abfolgen von Ziffern hier immer für die Zahl mit der entsprechenden Dezimaldarstellung.) Im ersten Fall gilt $xyxy \cdots xy = xy \cdot 101 \ldots 01$, wobei der letzte Faktor abwechselnd die Ziffern 1 und 0 und eine Ziffer weniger als $xyxy \cdots xy$ hat. Da $101 \ldots 01$ eine ungerade Zahl ist, ist eine Zweierpotenz nur dann ein Teiler von $xyxy \cdots xy$, wenn sie auch xy teilt. Also ist $xyxy \cdots xy$ kein Vielfaches von 128. Angenommen, die Zahl wäre ein Vielfaches von 128 von der Form $yxy \cdots xy$ mit k Ziffern für ein $k \geq 10$. Da 10^k durch 128 teilbar ist, wäre dann auch $yxy \cdots xy + x \cdot 10^k$ ein Vielfaches von 128. Die Dezimaldarstellung dieser Zahl ist $xyxy \cdots xy$ mit $k+1$ Ziffern. Für Zahlen mit einer Dezimaldarstellung dieser Form haben wir schon gezeigt, dass sie nicht durch 128 teilbar sein können. Also kann keine größere Zweierpotenz als 64 eine solche Zahl teilen. □

Aufgabe M.2 (5 P.). Chip und Dale spielen das folgende Spiel: Am Anfang legt Chip insgesamt 222 Nüsse in 2 Schachteln. Dale weiß, wie sie aufgeteilt sind. Er wählt eine ganze Zahl N zwischen 1 und 222. Chip darf nun Nüsse in die leere dritte Schachtel bewegen, wobei am Ende in einer der drei Schachteln oder in zwei Schachteln zusammen genau N Nüsse enthalten sein müssen. Dale bekommt alle Nüsse, die Chip bewegt hat. Was ist die höchstmögliche Anzahl an Nüssen, die Dale sicher bekommen kann, unabhängig davon wie Chip sich verhält?

Lösung. Die höchstmögliche Anzahl von Nüssen, die Dale mit Sicherheit bekommt, ist 37:

Chip legt in die erste Schachtel A Nüsse und in die zweite B Nüsse, ohne Einschränkung sei $A \leq B$. Wenn Dale die Zahl N wählt, hat Chip folgende

Möglichkeiten: Falls $N \leq A$ gilt, kann er $A - N$ Nüsse aus der ersten Schachtel und beliebig viele weitere Nüsse aus der zweiten Schachtel in die dritte Schachtel legen. Falls $N \geq A$ gilt, kann er $N - A$ Nüsse aus der zweiten Schachtel und beliebig viele weitere aus der ersten in die dritte Schachtel legen, so dass danach in der ersten und dritten zusammen N Nüsse liegen. (Da $A + B = 222$ gilt, ist $B \geq N - A$.) Ebenso kann Chip nur, indem er mindestens $|N - B|$ Nüsse bewegt, erreichen, dass in der zweiten oder in der zweiten und dritten Schachtel zusammen N Nüsse liegen. Weiterhin könnte Chip N Nüsse in die dritte Schachtel legen oder insgesamt $222 - N$ Nüsse aus den ersten beiden Schachteln wegnehmen. Also bewegt Chip mindestens so viele Nüsse, wie das Minimum von N, $|N - A|$, $|N - B|$ und $222 - N$ angibt, also das Minimum der Abstände von N zu den Zahlen 0, A, B und 222. Da $222 = (222 - B) + (B - A) + A$ gilt, ist eine der Zahlen $222 - B$, $B - A$ und A größergleich $\frac{222}{3} = 74$. Falls $222 - B \geq 74$ ist, erhält Dale mit Sicherheit mindestens 37 Nüsse, wenn er $N = B + 37$ wählt, denn dann sind die Zahlen $222 - N$, $N - B$, $N - A$ und N alle größergleich 37. In den Fällen $B - A \geq 74$ bzw. $A \geq 74$ erhält Dale entsprechend mindestens 37 Nüsse, wenn er $N = A + 37$ bzw. $N = 37$ wählt. Dale kann also in jedem Fall mindestens 37 Nüsse bekommen.

Chip kann verhindern, dass Dale mehr als 37 Nüsse bekommt: Dazu wählt er $A = 74$ und $B = 148$, dann gilt jeweils $A = 74$, $B - A = 74$ und $222 - B = 74$, daher hat jede Zahl von 1 bis 222 zu einer der Zahlen 0, A, B und 222 einen Abstand kleinergleich $\frac{74}{2} = 37$. □

Aufgabe M.3 (6 P.)**.** In einigen Feldern einer 11×11-Tabelle stehen Pluszeichen. Es ist bekannt, dass die Anzahl an Pluszeichen in der Tabelle und in jeder 2×2-Untertabelle (das sind 2×2 aneinandergrenzende Felder) gerade ist. Beweise, dass die Gesamtanzahl an Pluszeichen auf der Hauptdiagonalen der (großen) Tabelle auch gerade ist.

Lösung. Wir bezeichnen zwei Felder als *gleich* wenn beide ein Pluszeichen oder beide keines enthalten und als *verschieden*, wenn in einem ein Pluszeichen steht und in dem anderen nicht. Falls zwei aneinandergrenzende Felder aus zwei übereinanderliegenden Zeilen gleich sind, müssen auch die zwei Felder, die jeweils rechts (oder jeweils links) zu einem dieser Felder benachbart liegen, gleich sein, da die von diesen vier Feldern gebildete 2×2-Untertabelle eine gerade Anzahl von Pluszeichen enthält. Daher muss in diesem Fall für alle Felder dieser beiden Zeilen gelten, dass jeweils übereinanderliegende Felder gleich sind. Falls zwei übereinanderliegende Felder verschieden sind, müssen entsprechend jeweils übereinanderliegende Felder in denselben beiden Zeilen wie diese zwei Felder verschieden sein. Daraus folgt, dass es maximal zwei verschiedene Typen von Zeilen gibt, so dass Zeilen desselben Typs in denselben Spalten Pluszeichen haben und dass von zwei Zeilen verschiedenen Typs in jeder Spalte immer genau eine ein Pluszeichen enthält.

Da die Gesamtzahl von Pluszeichen gerade ist, gibt es eine gerade Anzahl von Zeilen mit ungerade vielen Pluszeichen. Alle diese Zeilen sind vom selben Typ, denn zwei Zeilen verschiedenen Typs haben insgesamt 11 Pluszeichen. Falls die Tabelle nur aus Zeilen des Typs mit gerade vielen Pluszeichen besteht, hat die Hauptdiagonale ebenso viele Pluszeichen wie jede Zeile. Man kann jede mögliche Tabelle aus einer solchen Tabelle erhalten, indem man eine gerade Zahl von Zeilen durch Zeilen des anderen Typs ersetzt. Genau in den veränderten Zeilen wird jeweils in der Hauptdiagonalen ein Pluszeichen hinzugefügt oder gelöscht. Da sie zuvor eine gerade Anzahl von Pluszeichen enthielt, ist die Anzahl der Pluszeichen der Hauptdiagonalen auch nach dem Ersetzen der Zeilen gerade.

□

ALTERNATIVE LÖSUNG. Wir betrachten die 2×2-Untertabellen aus Abbildung 1.

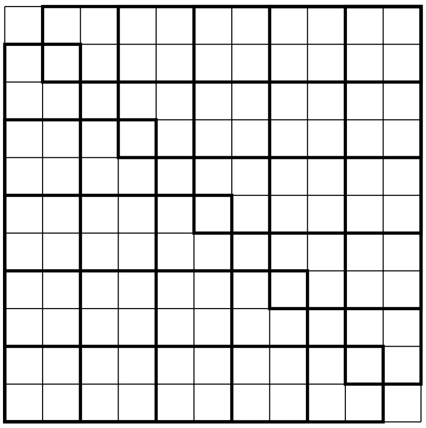

Abbildung 1: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.3.

Die Summe der Anzahlen der Pluszeichen in diesen Untertabellen ist gerade. Andererseits ist jedes Feld außerhalb der Hauptdiagonalen in genau einer solchen Untertabelle enthalten, fünf Felder der Hauptdiagonalen sind in jeweils zwei Untertabellen enthalten und die restlichen sechs Felder sind in keiner enthalten. Die Summe der Anzahlen der Pluszeichen in den Untertabellen entspricht also der Gesamtzahl n an Pluszeichen in der Tabelle minus der Anzahl a in den sechs nicht abgedeckten Feldern plus der Anzahl b der fünf doppelt abgedeckten Felder. Also ist $n-a+b$ gerade. Da nach Voraussetzung n gerade ist, ist $-a+b$ ebenfalls gerade. Die Zahl an Pluszeichen auf der Hauptdiagonalen ist $a+b = (-a+b)+2a$, also die Summe zweier gerader Zahlen und somit gerade. □

Aufgabe M.4 (7 P.)**.** Gegeben sei ein Dreieck ΔABC. Der Inkreismittelpunkt sei I und X, Y und Z seien die Inkreismittelpunkte der Dreiecke ΔABI, ΔBCI bzw. ΔCAI. Der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ΔXYZ sei derselbe Punkt wie I. Ist es dafür notwendig, dass das Dreieck ΔABC gleichseitig ist?

LÖSUNG. Ja, das Dreieck ΔABC muss gleichseitig sein wie im Folgenden gezeigt wird. Es seien P, Q und R die Schnittpunkte von AI mit ZX, BI mit XY bzw. CI mit YZ (siehe Abbildung 2). Hinweis zur Abbildung 2: In der Zeichnung stimmt Inkreismittelpunkt von ΔXYZ im Gegensatz zur Voraussetzung der Aufgabe nicht genau mit I überein.

Da X Inkreismittelpunkt von ABI ist, ist IX die Winkelhalbierende von $\angle AIB = \angle PIQ$. Außerdem soll I auch der Inkreismittelpunkt der Dreiecks ΔXYZ sein, so dass IX auch die Winkelhalbierende von $\angle ZXY = \angle PXQ$ ist. Die Dreiecke ΔXIP und ΔXIQ sind also ähnlich und das Viereck $XQIP$ ist ein Drachenviereck. Analog sind auch die Vierecke $YRIQ$ und $ZPIR$ Drachenvierecke.

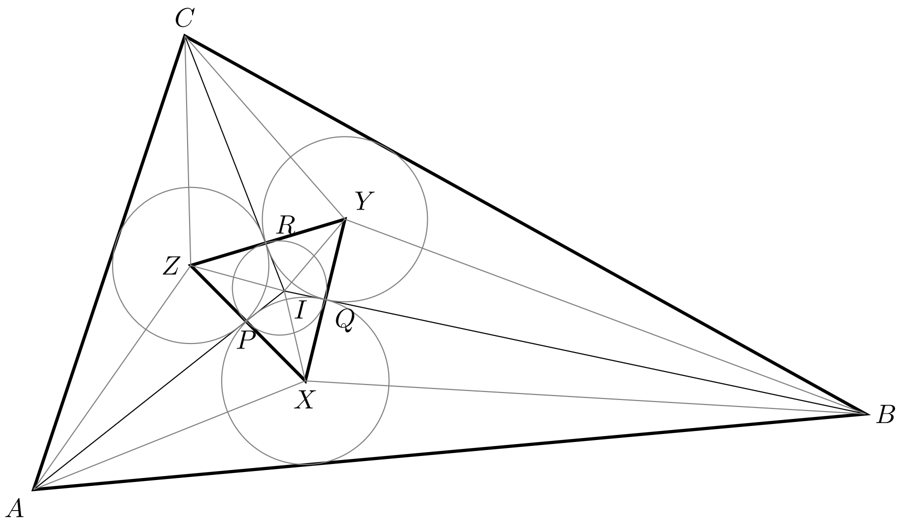

Abbildung 2: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.4.

Nun soll gezeigt werden, dass P, Q und R gerade die Berührpunkte des Inkreises des Dreiecks ΔXYZ mit dessen Seiten sind: Die Berührpunkte auf ZX und XY haben denselben Abstand von X. Da gleichzeitig $|XP| = |XQ|$ gilt, liegen die Berührpunkte entweder beide näher an X als P und Q oder beide weiter weg. Analoges gilt bezüglich Y für Q und R und außerdem bezüglich Z für R und P. Liegen die Berührpunkte allerdings näher an einem der Punkte X, Y und Z (als zwei der Punkte P, Q und R), müssten sie von beiden anderen beiden jeweils weiter entfernt liegen, was ein Widerspruch darstellt. Die Berührpunkte stimmen also mit P, Q und R überein.

Als Radien des Inkreises von ΔXYZ stehen IP, IQ und IR senkrecht auf den Seiten ZX, XY bzw. YZ. Da die Winkel $\angle XAP$ und $\angle PAZ$ jeweils $\frac{1}{2}\angle XAZ$ sind, sind also $|XP| = |ZP|$, also ist AI die Mittelsenkrechte von XZ. Analog sind BI und CI die Mittelsenkrechten von XY und YZ. Das Dreieck ΔXYZ ist also gleichseitig und $\angle PIQ = \angle QIR = \angle RIP = 120°$.

Da $\angle AIB = 120°$ ist, gilt $\angle BAI + \angle IBA = 180° - 120° = 60°$ und analog $\angle IAC + \angle ACI = 60°$. Da $\angle BAI = \frac{1}{2}\angle BAC = \angle IAC$, sind müssen also $\angle IBA$ und $\angle ACI$ gleich sein. Also sind auch die jeweils doppelt so großen Winkel $\angle CBA$ und $\angle ACB$ gleich groß. Mit analoger Argumentation ist auch $\angle BAC$ genauso groß, das Dreieck ΔABC ist also gleichseitig. □

Aufgabe M.5 (8 P.)**.** Ein Auto fährt entlang einer kreisförmigen Bahn im Uhrzeigersinn. Mittags beziehen Peter und Paul ihre Stellungen an zwei verschiedenen Positionen der Bahn. Später verlassen sie gleichzeitig ihre Positionen und vergleichen ihre Beobachtungen. Das Auto ist an jedem von ihnen mindestens 30-mal vorbeigefahren. Peter hat beobachtet, dass das Auto für jede Umrundung eine Sekunde weniger benötigt hat als für die vorherige. Paul beobachtet das Gegenteil: Für jede Umrundung hat das Auto eine Sekunde mehr benötigt als für die vorherige. Beweise, dass sie mindestens neunzig Minuten an der Bahn gestanden haben.

Lösung. Es sei T_{Paul} die Zeit (in Sekunden) der ersten Runde, die Paul gemessen hat. Mit T_{Peter} bezeichnen wir die Zeit der letzten Runde, die Peter gemessen hat. Jeder der beiden hat mindestens 29 Rundenzeiten gemessen.

Wir betrachten den Zeitraum der ersten 15 Runden, die Paul gemessen hat. Laut Aufgabenstellung dauerte dies genau

$$T_{\text{Paul}} + (T_{\text{Paul}} + 1) + \cdots + (T_{\text{Paul}} + 14) = 15T_{\text{Paul}} + 105$$

Sekunden.

Innerhalb dieses Zeitraums hat Peter 14 komplette Runden gemessen, dies waren entweder seine ersten 14 oder seine Runden 2 bis 15. In jedem Fall dauerte die letzte dieser Runden mindestens 14 Sekunden länger als die letzte und somit dauerten die 14 Runden insgesamt mindestens

$$(T_{\text{Peter}} + 14) + (T_{\text{Peter}} + 15) + \cdots + (T_{\text{Peter}} + 27) = 14T_{\text{Peter}} + 287$$

Sekunden.

Diese Gesamtzeit ist kürzer als die von Pauls ersten 15 Runden und somit haben wir

$$15T_{\text{Paul}} + 105 > 14T_{\text{Peter}} + 287,$$

beziehungsweise

$$15T_{\text{Paul}} - 14T_{\text{Peter}} > 182.$$

Betrachten wir nun die letzten 15 Runden, die Peter gemessen hat, erhalten wir analog

$$15T_{\text{Peter}} - 14T_{\text{Paul}} > 182.$$

Addieren wir die beiden Ungleichungen, so haben wir

$$T_{\text{Paul}} + T_{\text{Peter}} > 364.$$

Mindestens eine der beiden Zeiten $T_{\text{Paul}}, T_{\text{Peter}}$ ist daher mindestens 183 Sekunden, sagen wir T_{Paul}. Insgesamt stand Paul mindestens

$$T_{\text{Paul}} + (T_{\text{Paul}} + 1) + \cdots + (T_{\text{Paul}} + 28) = 29T_{\text{Paul}} + 406$$

Sekunden an der Bahn. Dies sind also mindestens

$$29 \cdot 183 + 406 = 5713$$

Sekunden, was 95 Minuten und 13 Sekunden entspricht. Die beiden haben also mehr als 90 Minuten an der Bahn gestanden. □

Aufgabe M.6. (a) (4 P.) Innerhalb eines Kreises sei ein Punkt A markiert. Zwei zueinander senkrechte Geraden werden durch A gezeichnet und schneiden den Kreis in vier Punkten. Beweise, dass der Schwerpunkt dieser vier Punkte nicht von der Wahl der beiden Geraden abhängt.

(b) (4 P.) Ein regelmäßiges $2n$-Eck ($n \geq 2$) mit Mittelpunkt A befinde sich innerhalb eines Kreises (A stimmt dabei nicht unbedingt mit dem Mittelpunkt des Kreises überein). Die Strahlen, die von A durch die Ecken des $2n$-Ecks gehen, markieren $2n$ Punkte auf dem Kreis. Dann wird das $2n$-Eck um A gedreht. Die Strahlen, die von A durch die neuen Eckpunkte des $2n$-Ecks gehen, markieren $2n$ neue Punkte auf dem Kreis. Seien O und N die Schwerpunkte jeweils der alten bzw. der neuen $2n$ Punkte. Beweise, dass $O = N$ gilt.

LÖSUNG. (a) Natürlich kann man auch die Lösung des zweiten Teils benutzen, folgende Überlegung erscheint aber etwas einfacher:

Man wählt ein Koordinatensystem mit dem Mittelpunkt des Kreises als Ursprung, so dass die beiden senkrechen Linien durch A parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen (siehe Abbildung 3). Es seien P und Q die Schnittpunkte der Parallelen zur x-Achse durch A mit dem Kreis und R und S die der Parallelen zur y-Achse durch A mit dem Kreis.

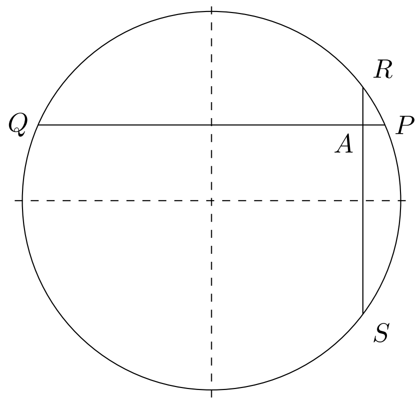

Abbildung 3: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.6 (Senkrechte).

Der Summe der x-Koordinaten von P und Q ist 0, während R und S dieselbe x-Koordinate haben wie A, also ergibt sich als Mittelwert der x-Koordinaten von P, Q, R und S

$$\frac{P_x + Q_x + R_x + S_x}{4} = \frac{0 + A_x + A_x}{4} = \frac{1}{2}A_x,$$

die Hälfte der x-Koordinate von A. Analog erhält man für die y-Koordinaten

$$\frac{P_y + Q_y + R_y + S_y}{4} = \frac{A_y + A_y + 0}{4} = \frac{1}{2}A_y.$$

Der Schwerpunkt von P, Q, R und S liegt also in der Mitte von A und dem Mittelpunkt des Kreises. Dies gilt unabhängig von der Wahl der Koordinaten, also auch unabhängig von der Wahl der beiden zueinander senkrechten Linien durch A.

(b) Die Eckpunkte des $2n$-Ecks mit Mittelpunkt A seien gegen den Uhrzeigersinn durchnummeriert (beliebig beginnend). Es seien P_i und P_i' mit $i = 1, \ldots, n$ die Schnittpunkte der Strahlen von A durch die i-te Ecke bzw. durch die der i-ten gegenüberliegende Ecke des $2n$-Ecks mit dem Kreis (siehe Abbildung 4)).

Da die Verbindung der gegenüberliegenden Punkte P_i und P_i' eine Sehne ist, geht deren Mittelsenkrechte durch den Kreismittelpunkt M. Sei M_i der Mittelpunkt von P_i und P_i'. Die Winkel $\angle MM_iA$ sind also alle rechte Winkel, sofern M_i nicht mit A oder M zusammenfällt. In jedem Fall liegen die Punkte M_i also auf einem Kreis mit Durchmessen MA. Dessen Mittelpunkt sei S.

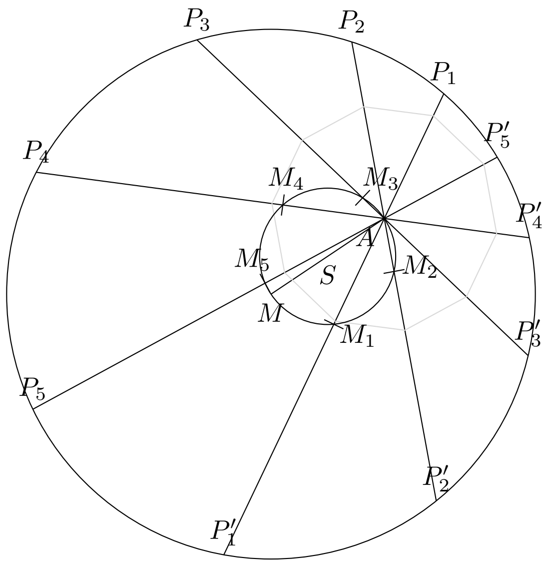

Abbildung 4: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.6 ($2n$-Eck).

Da A auf dem Kreis mit Mittelpunkt S liegt, gilt für A und S auf derselben Seite der Sehne M_iM_{i+1} nach dem Peripheriewinkelsatz

$$\angle M_iAM_{i+1} = \frac{1}{2}\angle M_iSM_{i+1},$$

anderenfalls

$$\angle M_iAM_{i+1} = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle M_iSM_{i+1}.$$

$\frac{1}{2}\angle M_iSM_{i+1}$ bzw. $180^\circ - \frac{1}{2}\angle M_iSM_{i+1}$ sind gerade die Winkel zwischen den Strahlen AP_i und AP_{i+1}, also die Winkel zwischen zwei benachbarten Ecken des regelmäßigen $2n$-Ecks zu dessen Zentrum, die alle gleich groß sind. Die Punkte M_i liegen also auf einem regelmäßigem n-Eck (mit doppelt so großen Zentrumswinkeln wie das $2n$-Eck) mit Mittelpunkt S.

Da M_i jeweils der Schwerpunkt zweier Punkte P_i und P_i' ist und S der Schwerpunkt der M_i, ist S auch der Schwerpunkt aller P_i und P_i'. Als Mittelpunkt von M und A verändert sich S nicht bei Drehung des $2n$-Ecks. □

Aufgabe M.7 (10 P.)**.** Peter und Paul spielen das folgende Spiel: Zunächst wählt Peter eine positive ganze Zahl a mit Quersumme 2012 aus. Paul will nun diese Zahl erraten, weiß aber zunächst nur, dass die Quersumme 2012 beträgt. In jedem Zug wählt Paul eine positive ganze Zahl x aus und Peter nennt Paul die Quersumme von $|x - a|$. Welches ist die minimale Anzahl an Zügen, mit der Paul Peters Nummer in jedem Fall ermitteln kann?

Lösung. Behauptung: Die Minimalanzahl der Fragen, mit der Paul Peters Nummer in jedem Fall ermitteln kann, ist 2012.

Beweis, Teil 1: Mit 2012 Fragen ist es möglich.

Frage 1 ist immer „1“. Dann wird die Frage schrittweise um 1 erhöht, solange bis die erhaltene Antwort größergleich 2012 ist. Es ist leicht zu sehen, dass die Anzahl an Fragen bis zu diesem Punkt um 1 größer als die letzte Ziffer der gedachten Zahl ist. Ist diese a_1, dann wird die letzte so erhaltene Quersumme $2012 - a_1 + 9(n_1 - 1) - 1$ sein, wobei n_1 die kleinste Stelle größer als 1 ist (von rechts gezählt), auf der keine 0 steht. Mit a_1 Fragen erhält man also a_1 und n_1.

Sei a_2 die vorletzte von null verschiedene gesuchte Ziffer bzw. die letzte solche Ziffer, falls $a_1 = 0$. Mit a_2 weiteren Fragen erfährt man auf analoge Weise sowohl a_2 als auch n_2, den Abstand zur davor stehenden von null verschiedenen Ziffer. Dabei beginnt man mit $a = 2 \cdot 10^{n_1 - 1}$ und erhöht a in jedem Schritt um $\cdot 10^{n_1-1}$.

Auf diese Weise benötigt man $1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 2013$ Fragen (wobei k die Anzahl der von null verschiedenen Ziffern ist). Allerdings ist man eine Frage früher fertig, weil man die Quersumme ja schon kennt. (Wenn man die Quersumme vorher nicht kennt, kann man die gesuchte Zahl ebenfalls bestimmen, aber die Anzahl der Fragen hängt von der unbekannten Quersumme ab und ist eins größer als diese.)

Beweis, Teil 2: weniger Fragen sind unmöglich.

Wir beweisen das für einen Spezialfall der möglichen Zahlen, nämlich solche, bei denen alle Ziffern entweder 0 oder 1 sind. Wie oben sei n_1 die Position (von rechts) der ersten 1, die zweite 1 stehe n_2 Stellen weiter links usw. Wir nehmen weiter an, dass alle n_i „hinreichend groß“ sind. Es darf sogar bekannt sein, dass außer 0 und 1 keine anderen Ziffern vorkommen.

Die erste Frage sei f_1. Wenn also n_1 größer ist als die Stellenanzahl von f_1 (und f_1 ist fest im Algorithmus, aber n_1 beliebig), dann erfährt man in der ersten Frage genau n_1 und nichts sonst. Sinnvollerweise wird die zweite Frage mehr als n_1 Stellen enthalten und sie kann von n_1 abhängen, aber von nichts sonst. Wenn dann n_2 hinreichend groß war, erfährt man in der zweiten Frage ebenfalls nur n_2 und nichts sonst. Da es 2012 Einsen gibt, braucht man 2012 Fragen, um deren Positionen zu erfahren.

All dies gilt für deterministische Algorithmen. Wenn sie probabilistische Elemente enthalten, gilt das Argument in ähnlicher Form immer noch: Dann mögen zwar die Fragen zufällig von den früheren Antworten abhängen, aber sind in jedem einzelnen Fall eine endliche Zahl; und sollte das folgende n_k nun immer noch groß genug sein, kommt man trotzdem nicht weiter: Es gibt also auch dann immer Zahlen, die man nicht schneller finden kann. □

O Oberstufe

Aufgabe O.1 (4 P.). Gegeben sei eine unendliche Folge an Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Für jede positive ganze Zahl k gibt es eine positive ganze Zahl $t = t(k)$, so dass $a_k = a_{k+t} = a_{k+2t} = \ldots$. Ist die Folge in jedem Fall periodisch? Gibt es also eine positive ganze Zahl T, so dass $a_k = a_{k+T}$ für jede positive ganze Zahl k gilt?

Lösung. Nein, wir geben ein Gegenbeispiel an. Wir definieren a_n als die größte Zweierpotenz, die n teilt. Wir zeigen nun, dass die Folge die gewünschte Eigenschaft hat. Sei dazu $a_k = 2^l$, dann gilt $k = r2^l$ für eine ungerade positive ganze

Zahl r. Dann sind aber $r+2, r+4, \dots$ auch ungerade. Also folgt:

$$\begin{aligned} a_k &= a_{r\cdot 2^l} = 2^l \\ a_{k+2\cdot 2^l} &= a_{(r+2)2^l} = 2^l \\ a_{k+4\cdot 2^l} &= a_{(r+4)2^l} = 2^l \\ a_{k+6\cdot 2^l} &= a_{(r+6)2^l} = 2^l \\ &\vdots \end{aligned}$$

Für $t = 2 \cdot 2^l$ gilt nun $a_k = a_{k+t} = a_{k+2t} = \dots$. Es gibt also für jede positive ganze Zahl k eine arithmetische Folge $k, k+t, k+2t, \dots$, die in k anfängt, so dass die Folgenwerte $a_k, a_{k+t}, a_{k+2t}, \dots$ alle gleich sind.

Wir zeigen nun noch, dass diese Folge nicht periodisch ist.

Wäre die Folge periodisch, so würde sie nur endlich viele verschiedene Zahlen enthalten. Offensichtlich kommen aber alle Zweierpotenzen in der Folge vor. □

Aufgabe O.2 (5 P.)**.** Chip und Dale spielen das folgende Spiel: Am Anfang legt Chip insgesamt 1001 Nüsse in 3 Schachteln. Dale weiß, wie sie aufgeteilt sind. Er wählt eine ganze Zahl N zwischen 1 und 1001. Chip darf nun Nüsse in die leere vierte Schachtel bewegen, wobei am Ende in einer der vier Schachteln oder in mehreren Schachteln zusammen genau N Nüsse enthalten sein müssen. Dale bekommt alle Nüsse, die Chip bewegt hat. Was ist die höchstmögliche Anzahl an Nüssen, die Dale sicher bekommen kann, unabhängig davon wie Chip sich verhält?

Lösung. Die höchstmögliche Anzahl von Nüssen, die Dale mit Sicherheit bekommt, ist 71:

Chip legt in die erste Schachtel A Nüsse, in die zweite B Nüsse und in die dritte C Nüsse. Wenn Dale die Zahl N wählt, hat Chip folgende Möglichkeiten: Falls $N \le A$ gilt, kann er $A - N$ Nüsse aus der ersten Schachtel und beliebig viele weitere Nüsse aus der zweiten und dritten Schachtel in die vierte Schachtel legen. Falls $N \ge A$ gilt, kann er insgesamt $N - A$ Nüsse aus der zweiten und dritten Schachtel und beliebig viele weitere aus der ersten in die vierte Schachtel legen, so dass danach in der ersten und dritten zusammen N Nüsse liegen. (Da $A + B + C = 1001$ gilt, ist $B + C \ge N - A$.) Ebenso kann Chip nur, indem er mindestens $|N - B|$ bzw. $|N - C|$ Nüsse bewegt, erreichen, dass in der zweiten oder in der zweiten und vierten Schachtel zusammen bzw. in der dritten oder in der dritten und vierten Schachtel zusammen N Nüsse liegen. Entsprechend gilt, dass Chip nur, wenn er mindestens $|N - (A + B)|$ bzw. $|N - (A + C)|$ bzw. $|N - (B + C)|$ Nüsse in die vierte Schachtel legt, in den ersten beiden oder den ersten beiden und der vierten Schachtel zusammen bzw. in der ersten und der dritten oder der ersten, der dritten und der vierten Schachtel zusammen bzw. in der zweiten und der dritten oder den letzten drei Schachteln zusammen N Nüsse erhält. Weiterhin könnte Chip N Nüsse in die vierte Schachtel legen oder insgesamt $1001 - N$ Nüsse aus den ersten drei Schachteln wegnehmen. Also bewegt Chip mindestens so viele Nüsse, wie das Minimum von N, $|N - A|$, $|N - B|$, $|N - C|$, $|N - (A + B)|$, $|N - (A + C)|$, $|N - (B + C)|$ und $1001 - N$ angibt, also das Minimum der Abstände von N zu den Zahlen 0, A, B, C, $A + B$, $A + C$, $B + C$ und 1001. Ordnet man diese acht Zahlen der Größe nach (wobei die Reihenfolge von gleich großen Zahlen beliebig gewählt wird), so haben mindestens zwei aufeinanderfolgende dieser Zahlen einen Abstand von $\frac{1001}{7} = 143$, da die Summe aller dieser sieben Abstände 1001 beträgt. Dale erhält mindestens 71 Nüsse, wenn er zur kleineren von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen mit maximalem Abstand 71 addiert und diese Summe als N wählt. Dann liegt N zwischen diesen beiden aufeinanderfolgenden Zahlen und hat zu beiden einen Abstand von mindestens 71. Daher ist auch der Abstand von N zu jeder anderen dieser Zahlen mindestens 71. Dale kann also in jedem Fall mindestens 71 Nüsse bekommen.

Chip kann verhindern, dass Dale mehr als 71 Nüsse bekommt: Dazu wählt er $A = 143$ und $B = 286$ und $C = 572$. Dann ist $0 < A < B < A+B < A+C < B+C < 1001$ und der Abstand von zwei aufeinanderfolgenden dieser Zahlen ist jeweils 143. Dann hat jede Zahl zwischen 1 und 1001 zu einer dieser acht Zahlen einen Abstand kleinergleich $\frac{143}{2} = 71 + \frac{1}{2}$. Jede ganze Zahl von 1 bis 1001 hat also zu einer dieser Zahlen einen Abstand von höchstens 71. □

Aufgabe O.3 (6 P.)**.** Ein Auto fährt entlang einer kreisförmigen Bahn im Uhrzeigersinn. Mittags beziehen Peter und Paul ihre Stellungen an zwei verschiedenen Positionen der Bahn. Später verlassen sie gleichzeitig ihre Positionen und vergleichen ihre Beobachtungen. Das Auto ist an jedem von ihnen mindestens 30-mal vorbeigefahren. Peter hat beobachtet, dass das Auto für jede Umrundung eine Sekunde weniger benötigt hat als für die vorherige. Paul beobachtet das Gegenteil: Für jede Umrundung hat das Auto eine Sekunde mehr benötigt als für die vorherige. Beweise, dass sie mindestens neunzig Minuten an der Bahn gestanden haben.

Lösung. Siehe Lösung von Aufgabe M.5. □

Aufgabe O.4 (8 P.)**.** In einem Dreieck ΔABC seien zwei Punkte C_1 und A_1 auf den Seiten AB bzw. BC ausgewählt (diese Punkte liegen nicht auf Eckpunkten). Sei K der Mittelpunkt von A_1C_1 und I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ΔABC. Unter der Annahme, dass C_1BA_1I ein Sehnenviereck ist, beweise, dass der Winkel $\angle CKA$ stumpf ist.

Lösung. Seien P und R die Lotfußpunkte von I auf AB bzw. BC (siehe Abbildung 5). Wir zeigen zunächst, dass K immer auf der Geraden PR liegt.

Da BI die Winkelhalbierende und C_1BA_1I ein Sehnenviereck ist, gilt nach dem Umfangswinkelsatz

$$\angle IA_1C_1 = \angle IBC_1 = \frac{\angle CBA}{2} = \angle A_1BI = \angle A_1C_1I.$$

Das Dreieck C_1A_1I ist damit gleichschenklig. Das heißt, dass IK senkrecht auf C_1A_1 steht. Zusammen mit $IR \perp BC$ folgt, dass KA_1RI ein Sehnenviereck ist, das heißt

$$\frac{180° - \angle CBA}{2} = \frac{\angle C_1IA_1}{2} = \angle KIA_1 = \angle KRB.$$

Analog ist auch $\frac{180°-\angle CBA}{2} = \angle BPK$. Insgesamt gilt

$$\angle KRB + \angle BPK + \angle RBP = \frac{180° - \angle CBA}{2} + \frac{180° - \angle CBA}{2} + \angle CBA = 180°$$

Daraus folgt $\angle PKR = 180°$, also liegen P, K und R auf einer Geraden.

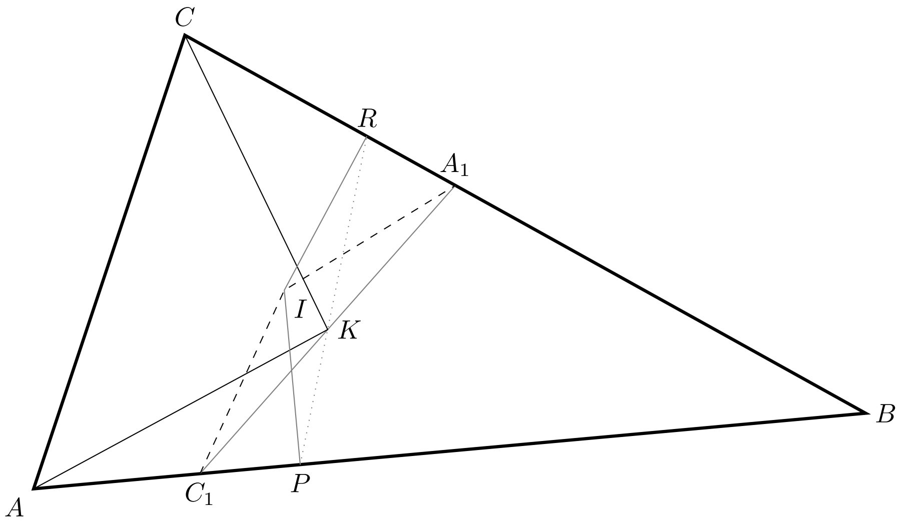

Abbildung 5: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.4.

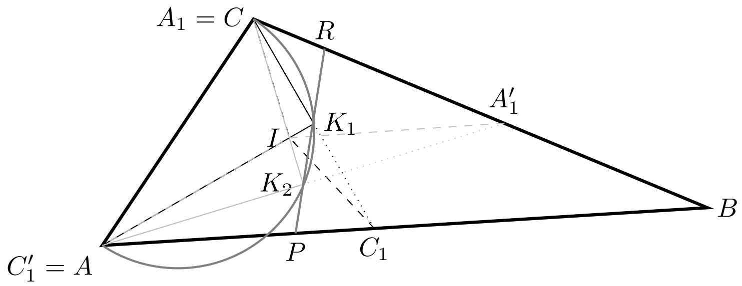

Abbildung 6: Zeichnung (Grenzfälle) zur Lösung von Aufgabe O.4.

Als Grenzfall $A_1 = C$ sei K_1 der Mittelpunkt von A_1C_1. Wir haben bereits gezeigt, dass das Dreieck C_1A_1I gleichschenklig ist. In dem Fall gilt $\angle ICC_1 = \angle CC_1I$ wegen $C = A_1$. Außerdem ist $\angle ACI = \angle ICB = 180° - \angle BC_1I = \angle IC_1A$, da CI die Winkelhalbierende und CIC_1B ein Sehnenviereck ist. Durch die Addition beider Gleichungen erhalten wir

$$\angle ACC_1 = \angle ACI + \angle ICC_1 = \angle CC_1I + \angle IC_1A = \angle CC_1A.$$

Damit ist das Dreieck ACC_1 gleichschenklig, das bedeutet der Lotfußpunkt von A auf CC_1 fällt auf dem Mittelpunkt K_1. In anderen Worten K_1 liegt auf dem Thaleskreis über AC. Analog liegt K_2, der Mittelpunkt von A_1C_1 für $C_1 = A$, auch auf dem Thaleskreis.

Die Änderung von K (auf PR) ist stetig und monoton bei der Verschiebung von A_1 und C_1. Daraus folgt, dass die K auf der Sehne zwischen K_1 und K_2 liegt. Insbesondere liegt K innerhalb des Thaleskreises über AC. Dies impliziert, dass der Winkel $\angle CKA$ stumpf ist. □

Aufgabe O.5 (8 P.)**.** Peter und Paul spielen das folgende Spiel: Zunächst wählt Peter eine positive ganze Zahl a mit Quersumme 2012 aus. Paul will nun diese Zahl erraten, weiß aber zunächst nur, dass die Quersumme 2012 beträgt. In jedem Zug wählt Paul eine positive ganze Zahl x aus und Peter nennt Paul die Quersumme von $|x - a|$. Welches ist die minimale Anzahl an Zügen, mit der Paul Peters Nummer in jedem Fall ermitteln kann?

Lösung. Siehe Lösung von Aufgabe M.7. □

Aufgabe O.6. (a) (5 P.) Der Punkt A liege innerhalb einer Kugel. Drei zueinander senkrechte Geraden seien durch A gezeichnet und schneiden die Kugel in sechs Punkten. Beweise, dass der Schwerpunkt dieser sechs Punkte nicht von der Wahl der drei Geraden abhängt.

(b) (5 P.) Ein Ikosaeder mit Mittelpunkt A liege innerhalb einer Kugel (dessen Mittelpunkt stimme nicht notwendig mit dem Mittelpunkt der Kugel überein). Die Strahlen von A durch die Ecken des Ikosaeders markieren 12 Punkte auf der Kugel. Nun wird das Ikosaeder um dessen Mittelpunkt gedreht. Die neuen Strahlen markieren 12 neue Punkte auf der Kugel. Seien O und N die Schwerpunkte jeweils der alten bzw. der neuen Punkte. Beweise, dass $O = N$ gilt.

Lösung. (a) Man wählt ein Koordinatensystem mit dem Mittelpunkt der Kugel als Ursprung, so dass die drei senkrechen Linien durch A parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen (vergleiche auch mit Abbildung 3 zur Lösung von Aufgabe M.6). Es seien P und Q die Schnittpunkte der Parallelen zur x-Achse durch A mit der Kugel, R und S die der Parallelen zur y-Achse durch A mit dem Kreis und T und U die der Parallelen zur z-Achse durch A mit dem Kreis.

Der Summe der x-Koordinaten von P und Q ist 0, während R, S, T und U dieselbe x-Koordinate haben wie A, also ergibt sich als Mittelwert der x-Koordinaten von P, Q, R, S, T und U

$$\frac{P_x + Q_x + R_x + S_x + T_x + U_x}{6} = \frac{0 + 4A_x}{6} = \frac{2}{3}A_x,$$

zwei Drittel der x-Koordinate von A. Analoges erhält man für die y- und z-Koordinaten. Der Schwerpunkt von P, Q, R, S, T und U liegt also auf zwei Drittel der Strecke vom Mittelpunkt der Kugel zu A. Dies gilt unabhängig von der Wahl der Koordinaten, also auch unabhängig von der Wahl der drei zueinander senkrechten Linien durch A.

(b) Zwei Strahlen von A durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Ikosaeders bilden zusammen eine Gerade, deren Mittelpunkte (in beliebiger Reihenfolge) mit $M_1, \ldots, M_6$ bezeichnet seien. Da M_i jeweils der Schwerpunkt der beiden Schnittpunkte einer durch A verlaufenden Geraden mit der Kugel ist, stimmt der Schwerpunkt der Punkte M_i mit dem gesuchten Schwerpunkt überein. Aufgrund der Symmetrie der Kugel entspricht M_i jeweils der Orthogonalprojektion des Kugelmittelpunktes M auf die entsprechende Gerade durch A. Man wählt nun ein Koordinatensystem mit A im Ursprung und nimmt die Geraden durch die Ikosaederecken als gegeben an. Im Folgenden wird gezeigt, dass es ein festes $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass der gesuchte Schwerpunkt immer gleich λM ist. Die Punkte M_i hängen linear von M ab: Sei e_i ein Vektor der Länge 1 auf der entsprechenden Ursprungsgeraden, dann ist $M_i = \langle e_i, M\rangle e_i$. Der gesuchte Schwerpunkt $S(M)$ ist gleich

$$\frac{1}{6}\bigl(M_1 + \cdots + M_6\bigr) = \frac{1}{6}\bigl(\langle e_1, M\rangle e_1 + \cdots + \langle e_6, M\rangle e_6\bigr),$$

hängt also ebenfalls linear von M ab. Da auch die rechte Seite der Gleichung $S(M) = \lambda M$ linear in M ist, gilt sie für alle Wahlen von M, sofern sie für drei linear unabhängige Vektoren und dasselbe λ erfüllt ist. Es reicht also zu zeigen, dass es ein λ gibt, so dass die Gleichung jeweils für $M = e_i$, $i = 1, \ldots 6$ richtig ist. Für $M = e_i$ ergibt sich aus der Symmetrie des Ikosaeders, dass der Schwerpunkt $S(e_i)$ auf der Ursprungsgeraden durch e_i liegen muss (die Punkte M_j mit $j \neq i$ bilden ein regelmäßiges Fünfeck in einer Ebene senkrecht zu dieser Geraden). Also gilt jeweils $S(e_i) = \lambda_i e_i$. Wiederum aufgrund der Symmetrie des Ikosaeders müssen alle λ_i identisch sein. □

Aufgabe O.7 (10 P.)**.** Ein Streifen bestehend aus $1 \times 1\,000\,000$ Feldern wird in 100 Abschnitte geteilt. (Die Abschnitte können verschieden lang sein.) Jedes Feld enthält eine ganze Zahl, dabei stimmen die Zahlen in Feldern desselben Abschnitts überein. In jedes Feld wird ein Chip gelegt. Anschließend werden die Chips nach folgender Vorschrift bewegt: Jeder Chip wird um so viele Felder nach rechts gezogen, wie die Zahl in seinem Feld angibt. (Wenn die Zahl negativ ist, wird der Chip nach links bewegt.) Danach enthält wieder jedes Feld genau einen Chip. Diese Prozedur wird nun viele weitere Male ausgeführt. Für jeden Chip, der ursprünglich im ersten Abschnitt lag, wird berechnet, nach wie vielen solcher Prozeduren er zum ersten Mal wieder im ersten Abschnitt liegt. Beweise, dass unter den berechneten Zahlen maximal 100 verschiedene sind.

Lösung. Zunächst stellen wir fest, dass nach jedem *Zug* (also einer Bewegung aller Chips) jedes Feld wieder belegt ist. Deshalb muss zu jedem Feld nicht nur ein eindeutiges Feld existieren, auf das der Chip des Feldes im nächsten Zug gezogen wird, sondern auch ein eindeutiges Feld, auf dem der Chip einen Zug früher lag.

Zwei benachbarte Chips aus dem ersten Teilstreifen werden sich komplett parallel bewegen (das heißt immer benachbarte Chips bleiben) und schließlich in der gleichen Anzahl Zügen den ersten Teilstreifen wieder erreichen, außer wenn sie während ihres Weges auf die Grenze zwischen zwei Teilstreifen treffen. Dies lässt sich auf alle Chips aus dem ersten Teilstreifen erweitern. Sie werden so lange parallel laufen, bis sie auf die Grenze zwischen zwei Teilstreifen treffen.

Durch Grenzen zwischen Teilstreifen werden sie in *Gruppen* geteilt. Diese Gruppen werden sich aber ihrerseits nicht zerteilen, außer sie treffen erneut auf Grenzen. Auf diese Weise können viele Gruppen entstehen. Jedoch kann an jeder Grenze zwischen zwei Teilstreifen nur einmal eine Gruppe geteilt werden, bevor die beiden Chips, zwischen denen die Gruppe zerteilt wird, wieder den ersten Abschnitt erreicht haben. Denn die beiden Chips einer zweiten Gruppe müssen sich auf derselben Bahn bewegt haben, wie die beiden Chips der ersten Gruppe, die an dieser Grenze geteilt wurde. Daher muss nur jeweils die erste Teilung an einer Grenze berücksichtigt werden, um Mengen von Chips mit jeweils der gleichen berechneten Zahl zu unterscheiden. Es gibt 99 Grenzfelder. Zunächst haben wir eine Gruppe. Nach 99 solcher Teilungen haben wir also maximal 100 solcher Mengen. Es gibt also maximal 100 verschiedene Anzahlen von Zügen, nach denen ein Chip wieder den ersten Abschnitt erreicht. □

Fragen und Anmerkungen. Schicken Sie diese bitte an *Städtewettbewerb Mathematik Hamburg* <stw.m.hh@gmail.com>. An den Lösungen haben mitgewirkt: Aimeric Malter, Ole Martin, Prof. Dr. Helmut Müller, Tyll Nelle, Dierk Schleicher, Mara Sommerfeld, Philipp Sprüssel, Jan Henrik Sylvester und Xianghui Zhong.