M Mittelstufe

Aufgabe 1 (4 P.)**.** In der Dezimaldarstellung einer Zahl kommen nur zwei verschiedene Ziffern vor. Die Zahl ist mindestens 10 Ziffern lang und je zwei benachbarte Ziffern sind unterschiedlich. Welches ist die größte Zweierpotenz, durch die eine solche Zahl teilbar sein kann?

Aufgabe 2 (5 P.)**.** Chip und Dale spielen das folgende Spiel: Am Anfang legt Chip insgesamt 222 Nüsse in 2 Schachteln. Dale weiß, wie sie aufgeteilt sind. Er wählt eine ganze Zahl N zwischen 1 und 222. Chip darf nun Nüsse in die leere dritte Schachtel bewegen, wobei am Ende in einer der drei Schachteln oder in zwei Schachteln zusammen genau N Nüsse enthalten sein müssen. Dale bekommt alle Nüsse, die Chip bewegt hat. Was ist die höchstmögliche Anzahl an Nüssen, die Dale sicher bekommen kann, unabhängig davon wie Chip sich verhält?

Aufgabe 3 (6 P.)**.** In einigen Feldern einer 11×11-Tabelle stehen Pluszeichen. Es ist bekannt, dass die Anzahl an Pluszeichen in der Tabelle und in jeder 2×2-Untertabelle (das sind 2×2 aneinandergrenzende Felder) gerade ist. Beweise, dass die Gesamtanzahl an Pluszeichen auf der Hauptdiagonalen der (großen) Tabelle auch gerade ist.

Aufgabe 4 (7 P.)**.** Gegeben sei ein Dreieck ΔABC. Der Inkreismittelpunkt sei I und X, Y und Z seien die Inkreismittelpunkte der Dreiecke ΔABI, ΔBCI bzw. ΔCAI. Der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ΔXYZ sei derselbe Punkt wie I. Ist es dafür notwendig, dass das Dreieck ΔABC gleichseitig ist?

Aufgabe 5 (8 P.)**.** Ein Auto fährt entlang einer kreisförmigen Bahn im Uhrzeigersinn. Mittags beziehen Peter und Paul ihre Stellungen an zwei verschiedenen Positionen der Bahn. Später verlassen sie gleichzeitig ihre Positionen und vergleichen ihre Beobachtungen. Das Auto ist an jedem von ihnen mindestens 30-mal vorbeigefahren. Peter hat beobachtet, dass das Auto für jede Umrundung eine Sekunde weniger benötigt hat als für die vorherige. Paul beobachtet das Gegenteil: Für jede Umrundung hat das Auto eine Sekunde mehr benötigt als für die vorherige. Beweise, dass sie mindestens neunzig Minuten an der Bahn gestanden haben.

Aufgabe 6. (a) (4 P.) Innerhalb eines Kreises sei ein Punkt A markiert. Zwei zueinander senkrechte Geraden werden durch A gezeichnet und schneiden den Kreis in vier Punkten. Beweise, dass der Schwerpunkt dieser vier Punkte nicht von der Wahl der beiden Geraden abhängt.

(b) (4 P.) Ein regelmäßiges $2n$-Eck ($n \geq 2$) mit Mittelpunkt A befinde sich innerhalb eines Kreises (A stimmt dabei nicht unbedingt mit dem Mittelpunkt des Kreises überein). Die Strahlen, die von A durch die Ecken des $2n$-Ecks gehen, markieren $2n$ Punkte auf dem Kreis. Dann wird das $2n$-Eck um A gedreht. Die Strahlen, die von A durch die neuen Eckpunkte des $2n$-Ecks gehen, markieren $2n$ neue Punkte auf dem Kreis. Seien O und N die Schwerpunkte jeweils der alten bzw. der neuen $2n$ Punkte. Beweise, dass $O = N$ gilt.

Aufgabe 7 (10 P.)**.** Peter und Paul spielen das folgende Spiel: Zunächst wählt Peter eine positive ganze Zahl a mit Quersumme 2012 aus. Paul will nun diese Zahl erraten, weiß aber zunächst nur, dass die Quersumme 2012 beträgt. In jedem Zug wählt Paul eine positive ganze Zahl x aus und Peter nennt Paul die Quersumme von $|x - a|$. Welches ist die minimale Anzahl an Zügen, mit der Paul Peters Nummer in jedem Fall ermitteln kann?

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden. — Viel Erfolg!