

O Oberstufe

Aufgabe 1 (4 P.). Gegeben sei eine unendliche Folge an Zahlen a_1, a_2, a_3, \dots . Für jede positive ganze Zahl k gibt es eine positive ganze Zahl $t = t(k)$, so dass $a_k = a_{k+t} = a_{k+2t} = \dots$. Ist die Folge in jedem Fall periodisch? Gibt es also eine positive ganze Zahl T , so dass $a_k = a_{k+T}$ für jede positive ganze Zahl k gilt?

Aufgabe 2 (5 P.). Chip und Dale spielen das folgende Spiel: Am Anfang legt Chip insgesamt 1001 Nüsse in 3 Schachteln. Dale weiß, wie sie aufgeteilt sind. Er wählt eine ganze Zahl N zwischen 1 und 1001. Chip darf nun Nüsse in die leere vierte Schachtel bewegen, wobei am Ende in einer der vier Schachteln oder in mehreren Schachteln zusammen genau N Nüsse enthalten sein müssen. Dale bekommt alle Nüsse, die Chip bewegt hat. Was ist die höchstmögliche Anzahl an Nüssen, die Dale sicher bekommen kann, unabhängig davon wie Chip sich verhält?

Aufgabe 3 (6 P.). Ein Auto fährt entlang einer kreisförmigen Bahn im Uhrzeigersinn. Mittags beziehen Peter und Paul ihre Stellungen an zwei verschiedenen Positionen der Bahn. Später verlassen sie gleichzeitig ihre Positionen und vergleichen ihre Beobachtungen. Das Auto ist an jedem von ihnen mindestens 30-mal vorbeigefahren. Peter hat beobachtet, dass das Auto für jede Umrundung eine Sekunde weniger benötigt hat als für die vorherige. Paul beobachtet das Gegenteil: Für jede Umrundung hat das Auto eine Sekunde mehr benötigt als für die vorherige. Beweise, dass sie mindestens neunzig Minuten an der Bahn gestanden haben.

Aufgabe 4 (8 P.). In einem Dreieck $\triangle ABC$ seien zwei Punkte C_1 und A_1 auf den Seiten AB bzw. BC ausgewählt (diese Punkte liegen nicht auf Eckpunkten). Sei K der Mittelpunkt von A_1C_1 und I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$. Unter der Annahme, dass C_1BA_1I ein Sehnenviereck ist, beweise, dass der Winkel $\angle CKA$ stumpf ist.

Aufgabe 5 (8 P.). Peter und Paul spielen das folgende Spiel: Zunächst wählt Peter eine positive ganze Zahl a mit Quersumme 2012 aus. Paul will nun diese Zahl erraten, weiß aber zunächst nur, dass die Quersumme 2012 beträgt. In jedem Zug wählt Paul eine positive ganze Zahl x aus und Peter nennt Paul die Quersumme von $|x - a|$. Welches ist die minimale Anzahl an Zügen, mit der Paul Peters Nummer in jedem Fall ermitteln kann?

Aufgabe 6. (a) (5 P.) Der Punkt A liege innerhalb einer Kugel. Drei zueinander senkrechte Geraden seien durch A gezeichnet und schneiden die Kugel in sechs Punkten. Beweise, dass der Schwerpunkt dieser sechs Punkte nicht von der Wahl der drei Geraden abhängt.

(b) (5 P.) Ein Ikosaeder mit Mittelpunkt A liege innerhalb einer Kugel (dessen Mittelpunkt stimme nicht notwendig mit dem Mittelpunkt der Kugel überein). Die Strahlen von A durch die Ecken des Ikosaeders markieren 12 Punkte auf der Kugel. Nun wird das Ikosaeder um dessen Mittelpunkt gedreht. Die neuen Strahlen markieren 12 neue Punkte auf der Kugel. Seien O und N die Schwerpunkte jeweils der alten bzw. der neuen Punkte. Beweise, dass $O = N$ gilt.

Aufgabe 7 (10 P.). Ein Streifen bestehend aus $1 \times 1\,000\,000$ Feldern wird in 100 Abschnitte geteilt. (Die Abschnitte können verschieden lang sein.) Jedes Feld enthält eine ganze Zahl, dabei stimmen die Zahlen in Feldern desselben Abschnitts überein. In jedes Feld wird ein Chip gelegt. Anschließend werden die Chips nach folgender Vorschrift bewegt: Jeder Chip wird um so viele Felder nach rechts gezogen, wie die Zahl in seinem Feld angibt. (Wenn die Zahl negativ ist, wird der Chip nach links bewegt.) Danach enthält wieder jedes Feld genau einen Chip. Diese Prozedur wird nun viele weitere Male ausgeführt. Für jeden Chip, der ursprünglich im ersten Abschnitt lag, wird berechnet, nach wie vielen solcher Prozeduren er zum ersten Mal wieder im ersten Abschnitt liegt. Beweise, dass unter den berechneten Zahlen maximal 100 verschiedene sind.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden.

Viel Erfolg!