Städtewettbewerb Frühjahr 2013
Lösungsvorschläge

Hamburg

19. März 2013 [Version 4. April 2013]

M Mittelstufe

Aufgabe M.1 (3 P.). Von sechs Punkten in der Ebene ist bekannt, dass sie sich in zwei Tripel aufteilen lassen, die jeweils ein Dreieck bilden. Ist es immer möglich, diese Punkte in zwei solche Tripel aufzuteilen, so dass die beiden Dreiecke keinen Punkt gemeinsam haben (weder innen noch auf dem Rand)?

Lösung. Nein, falls die Punkte des ersten Tripels die Eckpunkte eines Dreiecks sind, auf dessen drei Seiten jeweils einer der Punkte des zweiten Tripels liegen, so ist eine Aufteilung in zwei solche Tripel nicht möglich (siehe Abbildung 1):

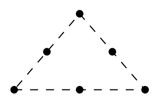

Abbildung 1: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.1.

Bei jeder Aufteilung der Punkte in zwei Tripel gehören (mindestens) zwei der Eckpunkte zu einem Tripel. Gehört der Punkt auf der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte ebenfalls zum Tripel, bildet es kein Dreieck. Anderenfalls gehört dieser Punkt zum anderen Tripel, liegt aber auch auf dem Rand des Dreiecks aus den Punkten des ersten Tripels. □

Aufgabe M.2 (4 P.). Es sei A eine positive ganze Zahl. Zwei Operationen sind erlaubt: Die Zahl kann um 9 erhöht werden oder eine Ziffer 1 darf an beliebiger Stelle aus der Zahl entfernt werden. Ist es immer möglich, $A + 1$ zu erhalten, indem man diese Operationen einige Male anwendet?

Bemerkung: Wenn eine führende 1 gelöscht wird, werden auch alle führenden Nullen gelöscht.

Lösung. Ja, es ist stets auf die folgende Weise möglich:

Die Zahl B habe die folgende Gestalt: Sie beginne mit achtmal der Ziffer 1, gefolgt von so vielen Ziffern 0, wie die Zahl A Ziffern hat, und am Ende noch einer Ziffer 1. Die Quersumme dieser Zahl B beträgt 9, also ist sie durch 9 teilbar. Man kann A also um B erhöhen. Danach muss man nur noch die führenden acht Einsen löschen, die bei der Addition $A + B$ von B stammen und nicht durch die Ziffern von A beeinflusst werden, und man hat die Zahl $A + 1$. □

Aufgabe M.3 (4 P.)**.** 11 Gewichte haben eine ganzzahlige Grammanzahl. Keine zwei von ihnen sind gleich. Es ist bekannt, dass, wann immer man alle Gewichte oder eine beliebige Teilmenge auf eine Balkenwaage legt, stets die Seite schwerer ist, auf der die größere Anzahl an Gewichten liegt. Beweise, dass mindestens ein Gewicht schwerer als 35 Gramm sein muss.

Lösung. Die Einheit Gramm wird im Folgenden weggelassen.

Jedes Gewicht ist mindestens um 1 schwerer als das nächst leichtere. Sei L die Grammanzahl des leichtesten Gewichts und S die des schwersten. Die sechs leichtesten Gewichte zusammen wiegen also mindestens $6 \cdot L+1+2+3+4+5 = 6 \cdot L + 15$, die fünf schwersten höchstens $5 \cdot S - 1 - 2 - 3 - 4 = 5 \cdot S - 10$. Die sechs leichtesten sollen schwerer sei als die fünf schwersten, also gilt

$$6 \cdot L + 15 > 5 \cdot S - 10.$$

Da zwischen L und S noch neun Gewichte liegen, gilt $S \geq L + 10$. Also ist

$$6 \cdot L + 15 > 5 \cdot S - 10 \geq 5 \cdot (L + 10) - 10 = 5 \cdot L + 40.$$

Dies ist äquivalent zu $L > 25$, also $S > 35$. □

Aufgabe M.4 (5 P.)**.** Acht Türme sind so auf einem 8×8-Schachbrett angeordnet, dass sich keine zwei von ihnen bedrohen (Türme greifen waagerecht oder senkrecht an). Die Felder sind wie folgt zwischen den Türmen aufgeteilt: Jeder besitzt sein eigenes Feld. Ein Feld, das von zwei Türmen bedroht wird, gehört dem näheren; falls beide gleich weit entfernt sind, gehört ihnen jeweils das halbe Feld. Beweise, dass jedem Turm die gleiche Fläche des Brettes gehört.

Lösung. Jedes Feld, auf dem kein Turm steht, wird von genau zwei Türmen bedroht, nämlich von einem waagerecht und von einem senkrecht, da in jeder Reihe waagerecht und senkrecht jeweils genau ein Turm steht.

Von jedem Paar Türme gibt es genau zwei Felder, die von beiden bedroht werden: das Feld in der waagerechten Reihe des ersten und der senkrechten des zweiten Turms und umgekehrt. Entweder die beiden Türme haben den gleichen waagerechten und senkrechten Abstand, so dass die beiden Felder jedem der Türme halb gehören, oder sie haben einen unterschiedlichen waagerechten und senkrechten Abstand, so dass ein Feld dem einen und das andere dem anderen Turm gehört: Ist der senkrechte Abstand kürzer, gehört jedem das Feld in seiner senkrechten Reihe, ist der waagerechte Abstand kürzer, gehört jedem das in seiner waagerechten Reihe.

Jedem Turm gehört also das Feld, auf dem er steht, und für jeden anderen Turm ein weiteres (ein ganzes oder zwei halbe). Insgesamt gehören jedem Turm also acht Felder, also insbesondere jedem die gleiche Fläche des Brettes. □

Aufgabe M.5 (5 P.)**.** In einem Viereck $ABCD$ sei der Winkel bei B gleich $150°$, der bei C ein rechter und die Seiten AB und CD gleich lang. Ermittle den Winkel zwischen BC und der Geraden, welche die Mittelpunkte der Seiten BC und AD miteinander verbindet.

Lösung. Es sei M der Mittelpunkt von BC und M' der von AD. Außerdem seien A' und D' so gewählt, dass $ABMA'$ und $MCDD'$ Parallelogramme sind (siehe Abbildung 2). Die Winkel der beiden Parallelogramme an M sind $\angle A'MB = 180° - \angle MBA = 30°$ und $\angle CMD' = 180° - \angle DCM = 90°$.

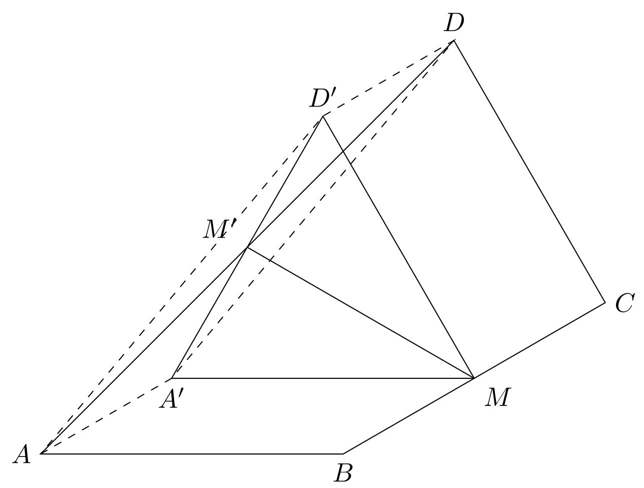

Abbildung 2: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.5.

Weil die Strecken AA' und $D'D$ gleich lang und parallel sind, ist auch $AA'DD'$ ein Parallelogramm. In einem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen, also ist M' auch der Mittelpunkt von $A'D'$.

Das Dreieck $\triangle A'MD'$ ist gleichseitig: Der Winkel an M ist $\angle D'MA' = 180° - \angle CMD' - \angle A'MB = 60°$ und die beiden anliegenden Schenkel sind gleich lang, da sie die gleiche Länge wie AB und CD haben.

Da $\triangle A'MD'$ ein gleichschenkliges Dreieck und M' der Mittelpunkt von $A'D'$ ist, ist MM' eine Höhe von $\triangle A'MD'$. Also ist $\angle M'MA' = 30°$ und der gesuchte Winkel $\angle M'MB$ ist

$$\angle M'MB = \angle M'MA' + \angle A'MB = 30° + 30° = 60°. \qquad \square$$

Alternative Lösung. Es sei M der Mittelpunkt von BC und M' der von AD. Außerdem sei O der Schnittpunkt der Geraden AB und CD sowie N der von $M'M$ und AB (siehe Abbildung 3).

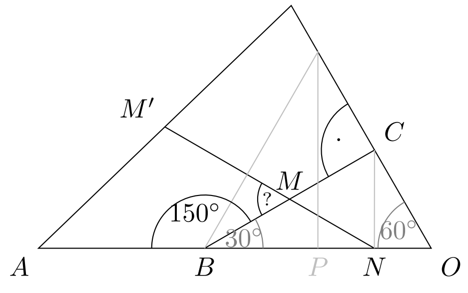

Abbildung 3: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.5.

Zunächst wird gezeigt, dass der gesuchte Winkel $\angle M'MB$ eindeutig festgelegt ist, da er unabhängig von den Länge $|AB| = |CD|$ ist (und damit auch von $|BC|$, da die gesamte Figur noch skaliert werden kann). Wählt man einen beliebigen Punkt $B + \ell \cdot (A - B)$ mit $\ell \in \mathbb{R}$ auf der Geraden BA und den entsprechenden Punkt $C + \ell \cdot (D - C)$ auf der Geraden CD, so ist der Mittelpunkt

$$\frac{B + \ell \cdot (A - B) + C + \ell \cdot (D - C)}{2} = \frac{B + C}{2} + \ell \cdot \frac{A - B + D - C}{2},$$

also liegen diese Mittelpunkt alle auf einer Geraden.

Da $\angle CBA = 150°$, ist $\angle OBC = 30°$, und da $\angle BCO = \angle DCB = 90°$, ist $\angle COB = 60°$ (die Winkel sind alle in Abbildung 3 eingetragen). Also ist das Dreieck ΔBOC die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks.

Bezeichnet P den Mittelpunkt von BO, dann ist $|BP| = |CO|$. Weil P auf der Geraden BA und O auf der Geraden CD liegt, liegt nach dem obigen Argument (mit $\ell = -\frac{|CO|}{|AB|}$) ihr Mittelpunkt auf der Geraden MM' und ist daher mit N identisch. Deshalb ist N ebenfalls der Fußpunkt des Lots von C auf BO, da C Mittelpunkt der Seite des gleichseitigen Dreiecks über BO ist.

Der Fußpunkt des Lots von M auf BN ist der Mittelpunkt von BN, da M der Mittelpunkt von BC ist. Also ist das Dreieck ΔBNM gleichschenklig mit $\angle MNB = \angle NBM = 30°$ und deswegen $\angle BMN = 120°$. Somit ist der gesuchte Winkel $\angle M'MB = 60°$. □

O Oberstufe

Aufgabe O.1 (3 P.)**.** Es sei A eine positive ganze Zahl. Zwei Operationen sind erlaubt: Die Zahl kann um 9 erhöht werden oder eine Ziffer 1 darf von beliebiger Stelle aus der Zahl entfernt werden. Ist es immer möglich, $A + 1$ zu erhalten, indem man diese Operationen einige Male anwendet?

Bemerkung: Wenn eine führende 1 gelöscht wird, werden auch alle führenden Nullen gelöscht.

Lösung. Siehe Lösung von Aufgabe M.2. □

Aufgabe O.2 (4 P.)**.** In einem Dreieck ΔABC sei der Winkel bei C ein rechter. Auf den Katheten AC und BC werden außerhalb des Dreiecks Quadrate $ACKL$ und $CBNM$ konstruiert. Sei CE eine Höhe im Dreieck. Beweise, dass der Winkel $\angle MEL$ ein rechter ist.

Lösung. Da das Dreieck ΔBCA rechtwinklig ist und E der Höhenfußpunkt der Höhe durch C (siehe Abbildung 4), sind die Teildreiecke ΔCEA und ΔBEC ähnlich zu ΔBCA.

Da die Teildreiecke ähnlich und um 90° gedreht sind und die Quadrate $ACKL$ und $CBNM$ jeweils auf deren Hypotenusen aufgesetzt sind, sind auch die zusammengesetzten Figuren $EBNMC$ und $ECKLA$ ähnlich und um 90° gedreht, also auch EM zu EL. Der Winkel $\angle MEL$ ist also ein rechter. □

Aufgabe O.3 (4 P.)**.** Acht Türme sind so auf einem 8×8-Schachbrett angeordnet, dass sich keine zwei von ihnen bedrohen (Türme greifen waagerecht oder senkrecht an). Die Felder sind wie folgt zwischen den Türmen aufgeteilt: Jeder besitzt sein eigenes Feld. Ein Feld, das von zwei Türmen bedroht wird, gehört dem näheren; falls beide gleich weit entfernt sind, gehört ihnen jeweils das halbe Feld. Beweise, dass jedem Turm die gleiche Fläche des Brettes gehört.

Lösung. Siehe Lösung von Aufgabe M.4. □

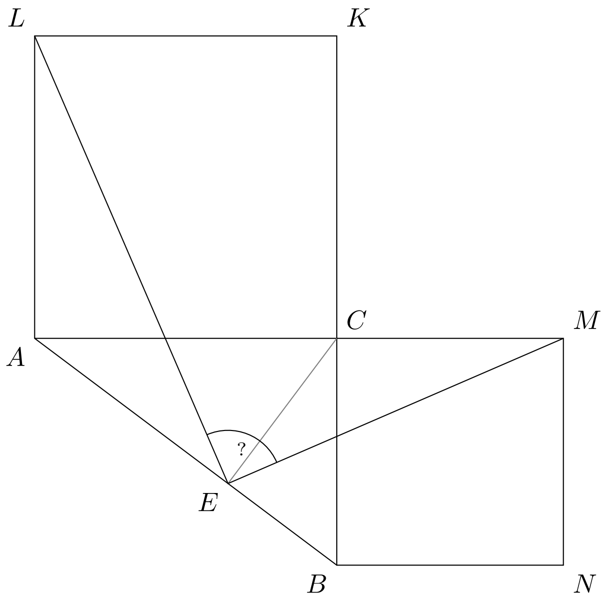

Abbildung 4: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.2.

Aufgabe O.4 (4 P.)**.** An 100 Steinen zeigen Aufkleber deren wirkliches Gewicht. Keine zwei Steine sind gleich schwer. Der schelmische Greg möchte die Aufkleber so umordnen, dass die Summe der Zahlen einer beliebigen Gruppe von 1 bis 99 Steinen niemals deren wirklichem Gewicht entspricht. Ist dies immer möglich?

Lösung. Ja, es ist möglich: Greg kann zum Beispiel den Aufkleber auf dem schwersten Stein durch den vom leichtesten Stein ersetzen und auf alle anderen Steine jeweils den Aufkleber des nächst schwereren Steines kleben. Falls eine Gruppe von Steinen nicht den schwersten Stein enthält, ist die aufgeklebte Zahl auf jedem Stein größer als das Gewicht des Steines, also ist deren Summe größer als das Gesamtgewicht der Steine. Enthält eine Gruppe von höchstens 99 Steinen hingegen den schwersten Stein, so ist die Summe der Zahlen auf den Aufklebern aller anderen Steine größer als das Gesamtgewicht aller anderen Steine. Da das Gesamtgewicht aller 100 Steine der Summe der Zahlen aller 100 Aufkleber entspricht, muss also die Summe der aufgeklebten Zahlen dieser Gruppe kleiner als das Gesamtgewicht von deren Steinen sein. □

Aufgabe O.5 (5 P.)**.** Ein quadratisches Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten sei *zulässig*, wenn der erste Koeffizient 1 ist, alle Nullstellen ganzzahlig sind und der Betrag keines Koeffizienten 2013 übersteigt. Basil hat die Summe aller zulässigen Polynome gebildet. Beweise, dass das Ergebnispolynom keine reellen Nullstellen hat.

Lösung. Die Summe aller zulässigen Polynome können wir als $S(x) = nx^2 + Px+Q$ schreiben, wobei n die Anzahl der zulässigen Polynome ist. Wenn a, b die Nullstellen eines zulässigen Polynoms x^2+px+q sind, dann gilt $p = -(a+b)$ und $q = ab$. (Die Nullstellen des Polynoms sind $a = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ und $b = -\frac{p}{2} -$

$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, die beiden Gleichungen folgen durch simples Einsetzen.) Hieraus folgt, dass auch $-a, -b$ Nullstellen eines zulässigen Polynoms sind, nämlich von $x^2 + (a+b)x + ab$. Dabei handelt es sich um unterschiedliche Polynome, sofern $a \neq -b$ gilt, also $a + b \neq 0$. Für jedes zulässige Polynom $x^2 - (a+b)x + ab$ ist also auch $x^2 + (a+b)x + ab$ zulässig, daher ist $P = 0$. Also hat S genau dann keine reellen Nullstellen, wenn Q positiv ist.

Zu einem zulässigen Polynom $x^2 - (a+b)x + ab$ betrachten wir das quadratische Polynom $x^2 - (b-a)x - ab$ (also mit Nullstellen $-a, b$). Dabei nehmen wir ohne Einschränkung $|a| \leq |b|$ an. Da $|ab|$ nicht größer als 2013 ist, ist auch $|-ab|$ nicht größer als 2013. Der einzige Grund, der das Polynom daran hindern kann, zulässig zu sein, ist, falls $|a - b|$ größer als 2013 ist. Für $|a| \geq 2$ (und somit auch $|b| \geq 2$) gilt aber immer $|ab| \geq |a| + |b| \geq |a - b|$. Da $|ab|$ nicht größer als 2013 ist, ist das Polynom in diesem Fall also zulässig. Für $a = 0$ ist das Polynom ebenfalls zulässig, da es identisch mit dem ursprünglichen Polynom ist. Die einzigen beiden Fälle, in denen das Polynom nicht zulässig ist, sind $a = 1, b = -2013$ und $a = -1, b = 2013$.

Wir haben also

- für $|a| = 1, |b| = 2013$ zwei zulässige Polynome $x^2 + 2012x - 2013$ und $x^2 - 2012x - 2013$,
- für $|a| = |b| > 0$ drei verschiedene zulässige Polynome, nämlich $x^2 + 2ax + a^2$, $x^2 - 2ax + a^2$ und $x^2 - a^2$,
- für $a = b = 0$ ein zulässiges Polynom, nämlich x^2,
- für $a = 0$ und $b \neq 0$ zwei zulässige Polynome, nämlich $x^2 - bx$ und $x^2 + bx$ und schließlich
- in allen anderen Fällen vier verschiedene zulässige Polynome, nämlich $x^2 + (a+b)x + ab$, $x^2 - (a+b)x + ab$, $x^2 + (a-b)x - ab$ und $x^2 + (b-a)x - ab$.

In den letzten drei Fällen addieren sich die konstanten Terme zu Null, im ersten Fall zu -4026 und im zweiten Fall zu a^2. Da 44 die größte ganze Zahl ist, deren Quadrat nicht größer als 2013 ist, haben wir also

$$Q = -4026 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 44^2.$$

Nun ist bereits $44^2 + 43^2 + 42^2$ größer als 4026, also ist Q positiv und wir haben gezeigt, dass S keine reellen Nullstellen hat. □

Fragen und Anmerkungen. Schicken Sie diese bitte an *Städtewettbewerb Mathematik Hamburg* <stw.m.hh@gmail.com>. An den Lösungen haben mitgewirkt: Mara Sommerfeld, Philipp Sprüssel und Jan Henrik Sylvester.