M Mittelstufe

Aufgabe 1 (3 P.). Jede von 100 Zahlen wird um 1 erhöht. Daraufhin wird ein weiteres Mal jede Zahl um 1 erhöht. Es ist bekannt, dass sich beim ersten Erhöhen die Summe der Quadrate aller Zahlen nicht verändert hat. Wie verändert sich die Summe der Quadrate beim zweiten Erhöhen?

Aufgabe 2 (4 P.). Olgas Mutter backt 15 Pasteten, die sie auf einer runden Platte im Kreis anordnet: Sieben Pasteten mit Kohl gefüllt, sieben mit Fleisch und eine mit Kirschen legt sie genau in dieser Reihenfolge auf die Platte, die sie danach in die Mikrowelle stellt. Alle Pasteten sehen gleich aus, aber Olga weiß die Reihenfolge. Leider weiß sie nicht, wie die Platte in der Mikrowelle verdreht wurde. Olga möchte die mit Kirschen gefüllte Pastete bekommen. Kann Olga sicher ihre Lieblingspastete essen, wenn sie nicht mehr als drei andere Pasteten probieren darf?

Aufgabe 3 (4 P.). Eine 7×5-Tabelle ist so mit Zahlen gefüllt, dass in jedem (vertikalen und horizontalen) 2×3-Rechteck die Summe der Einträge 0 ergibt. Peter kennt die Einträge nicht, kann sich aber für zehn Dollar jeweils eine Zelle aussuchen, deren Eintrag er genannt bekommt. Was ist der niedrigste Betrag, den Peter ausgeben muss, um danach sicher die Gesamtsumme aller Einträge in der Tabelle zu wissen?

Aufgabe 4 (5 P.). Im Dreieck ΔABC sei M der Mittelpunkt von AB. L liege so auf der Seite BC, dass die Strecke AL doppelt so lang ist wie die Seitenhalbierende CM. Beweise unter der Voraussetzung $\angle CLA = 45°$, dass AL senkrecht auf CM steht.

Aufgabe 5 (6 P.). Ali Baba und die 40 Räuber wollen den Bosporus überqueren (die Meerenge zwischen Europa und Kleinasien). Sie haben sich so in einer Reihe aufgestellt, dass jeweils diejenigen, die nebeneinander stehen, auch befreundet sind. Am Anfang steht Ali Baba und der Räuber neben seinem Nachbarn ist ebenfalls Ali Babas Freund. Es gibt nur ein Boot, dass nur zwei oder drei Personen tragen kann, die alle befreundet sein müssen. Eine einzelne Person kann nicht allein segeln. Können Ali Baba und die 40 Räuber in jedem Fall die Meerenge überqueren?

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden. Viel Erfolg!

O Oberstufe

Aufgabe 1 (4 P.)**.** Inspector Gadget hat 36 Steine mit den Massen 1 Gramm, 2 Gramm, ..., 36 Gramm. Doctor Claw hat einen Superkleber, von dem ein Tropfen zwei Steine zu einem Stein zusammenkleben kann (also zwei Tropfen kleben drei Steine zusammen usw.). Doctor Claw möchte einige Steine so zusammenkleben, dass in der so erhaltenen Menge an Steinen Inspector Gadget nicht mehr einen oder mehrere davon auswählen kann, so dass deren Gesamtmasse genau 37 Gramm beträgt. Finde die kleinste Anzahl an Tropfen, die Doctor Claw benötigt, um dies zu erreichen.

Aufgabe 2 (4 P.)**.** Im konvexen Viereck $ABCD$ stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander. Die Punkte M und N liegen auf den Seiten AD bzw. CD, so dass die Winkel $\angle NBA$ und $\angle CBM$ beide rechte Winkel sind. Beweise, dass die Geraden AC und MN parallel sind.

Aufgabe 3 (5 P.)**.** Ali Baba und die 40 Räuber wollen den Bosporus überqueren (die Meerenge zwischen Europa und Kleinasien). Sie haben sich so in einer Reihe aufgestellt, dass jeweils diejenigen, die nebeneinander stehen, auch befreundet sind. Am Anfang steht Ali Baba und der Räuber neben seinem Nachbarn ist ebenfalls Ali Babas Freund. Es gibt nur ein Boot, dass nur zwei oder drei Personen tragen kann, die alle befreundet sein müssen. Eine einzelne Person kann nicht allein segeln. Können Ali Baba und die 40 Räuber in jedem Fall die Meerenge überqueren?

Aufgabe 4 (5 P.)**.** Die positiven ganzen Zahlen a, b, c und d seien paarweise teilerfremd und erfüllen die Gleichung

$$ab + cd = ac - 10bd.$$

Beweise, dass man immer drei dieser Zahlen auswählen kann, so dass eine der Zahlen gerade die Summe der beiden anderen ist.

Aufgabe 5 (5 P.)**.** Die Wege eines großen Parks bilden die Seiten und Diagonalen eines konvexen Vierecks $ABCD$. Alex beginnt bei A und wandert entlang AB, BC und CD. Ben wandert entlang AC; er verlässt A gleichzeitig mit Alex und erreicht C gleichzeitig mit Alex. Chris wandert entlang BD; er verlässt B zum gleichen Zeitpunkt, als Alex an B vorbeikommt, und erreicht D gleichzeitig mit Alex. Kann es passieren, dass Ben und Chris gleichzeitig den Punkt O erreichen, welcher der Schnittpunkt von AC und BD sei? Die Geschwindigkeit der Wanderer sei jeweils konstant.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden. Viel Erfolg!