Städtewettbewerb Frühjahr 2014
Lösungsvorschläge

Hamburg

19. Februar 2014 [Version 7. März 2014]

M Mittelstufe

Aufgabe M.1 (3 P.). Jede von 100 Zahlen wird um 1 erhöht. Daraufhin wird ein weiteres Mal jede Zahl um 1 erhöht. Es ist bekannt, dass sich beim ersten Erhöhen die Summe der Quadrate aller Zahlen nicht verändert hat. Wie verändert sich die Summe der Quadrate beim zweiten Erhöhen?

Lösung. Wir bezeichnen die 100 Zahlen mit $a_1, \ldots, a_{100}$. Nach dem ersten Erhöhen hat sich die Summe der Quadrate aller Zahlen nicht geändert, es gilt also:

$$\begin{aligned} a_1^2 + \ldots + a_{100}^2 =& (a_1+1)^2 + \ldots + (a_{100}+1)^2 \\ =& ({a_1}^2 + 2a_1 + 1) + \ldots + ({a_{100}}^2 + 2a_{100} + 1) \\ =& {a_1}^2 + \ldots + {a_{100}}^2 + 2(a_1 + \ldots + a_{100}) + 100 \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der 100 Quadrate erhält man $0 = 2(a_1 + \ldots + a_{100}) + 100$, also

$$a_1 + \ldots + a_{100} = -50.$$

Die Summe nach dem zweiten Erhöhen ist:

$$\begin{aligned} (a_1+2)^2 + \ldots + (a_{100}+2)^2 =& (a_1^2 + 4a_1 + 4) + \ldots + (a_{100}^2 + 4a_{100} + 4) \\ =& a_1^2 + \ldots + a_{100}^2 + 4(a_1 + \ldots + a_{100}) + 400 \end{aligned}$$

Benutzt man $a_1 + \ldots + a_{100} = -50$, erhält man

$$\begin{aligned} (a_1+2)^2 + \ldots + (a_{100}+2)^2 =& a_1^2 + \ldots + a_{100}^2 + 4 \cdot (-50) + 400 \\ =& a_1^2 + \ldots + a_{100}^2 + 200. \end{aligned}$$

Also ist Summe der Quadrate nach dem zweiten Erhöhen um 200 größer als die ursprüngliche Summe. □

Aufgabe M.2 (4 P.). Olgas Mutter backt 15 Pasteten, die sie auf einer runden Platte im Kreis anordnet: Sieben Pasteten mit Kohl gefüllt, sieben mit Fleisch und eine mit Kirschen legt sie genau in dieser Reihenfolge auf die Platte, die sie danach in die Mikrowelle stellt. Alle Pasteten sehen gleich aus, aber Olga weiß die Reihenfolge. Leider weiß sie nicht, wie die Platte in der Mikrowelle verdreht wurde. Olga möchte die mit Kirschen gefüllte Pastete bekommen. Kann Olga sicher ihre Lieblingspastete essen, wenn sie nicht mehr als drei andere Pasteten probieren darf?

Lösung. Olga kann ihre Lieblingspastete sicher essen und zwar wie folgt: Zunächst probiert Olga irgendeine Pastete. Angenommen sie enthält Kohl, falls sie nämlich Kirschen enthält, ist Olga sowieso fertig, bei Fleisch könnte sie einfach spiegelverkehrt fortfahren, wobei die Rollen von Kohl und Fleisch vertauscht sind. Nun probiert Olga die Pastete, die entlang des Kreises vier Pasteten vor der zuerst probierten steht. Bei Kirschen ist Olga fertig, es müssen noch die anderen beiden Fälle untersucht werden.

Hat Olga als zweites wieder Kohl gefunden, dann probiert sie die Pastete noch zwei vor der zweiten probierten. Ist es wieder Kohl, so steht noch eine davor entlang des Kreises die Pastete mit Kirschen, da sie insgesamt herausgefunden hat, wo sieben aufeinanderfolgende Kohlpasteten stehen. Ist die dritte Pastete mit Fleisch gefüllt, so muss die Kirschpastete zwischen der zweiten und dritten probierten stehen, da direkt nach den Fleischpasteten die Kirschpastete steht, bevor wieder Kohlpasteten beginnen.

Hat Olga als zweites Fleisch gefunden, dann probiert sie die Pastete in der Mitte zwischen der ersten und zweiten probierten. Die Kirschpastete steht zwischen Kohl und Fleisch, hat Olga also Fleisch gefunden, steht sie direkt davor, anderenfalls direkt danach. □

Aufgabe M.3 (4 P.)**.** Eine 7×5-Tabelle ist so mit Zahlen gefüllt, dass in jedem (vertikalen und horizontalen) 2×3-Rechteck die Summe der Einträge 0 ergibt. Peter kennt die Einträge nicht, kann sich aber für zehn Dollar jeweils eine Zelle aussuchen, deren Eintrag er genannt bekommt. Was ist der niedrigste Betrag, den Peter ausgeben muss, um danach sicher die Gesamtsumme aller Einträge in der Tabelle zu wissen?

Lösung. Betrachten wir zunächst die Abbildung 1, diese zeigt zwei verschiedene Möglichkeiten, Zahlen so in die Tabelle zu schreiben, dass alle Bedingungen erfüllt sind. Bei der einen ist die Gesamtsumme 0, bei der anderen 1. Deswegen muss Peter, um die Gesamtsumme kennen zu können, mindestens ein Feld kennen.

1	-1	1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Abbildung 1: Beispiele zur Lösung von Aufgabe M.3.

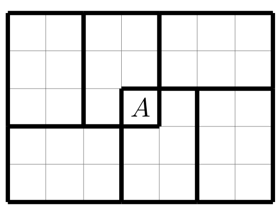

Abbildung 2: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.3.

Betrachten wir nun Abbildung 2, diese zeigt eine Möglichkeit, 2×3-Rechtecke so in die Tabelle einzuschreiben, dass jedes Feld bis auf das mittlere (mit Eintrag A) in genau einem Rechteck enthalten ist. Das Feld mit Eintrag A ist in zwei Rechtecken enthalten. Wenn sich Peter also den Eintrag des Feldes A nennen lässt, weiß er, dass das Negative dieses Eintrages die Gesamtsumme sein muss, da die Summe der Rechtecke ja gerade jeweils 0 ist.

Die gesuchte Gesamtsumme ist damit $-A$ und Peter muss insgesamt zehn Dollar ausgeben. □

Aufgabe M.4 (5 P.)**.** Im Dreieck ΔABC sei M der Mittelpunkt von AB. L liege so auf der Seite BC, dass die Strecke AL doppelt so lang ist wie die Seitenhalbierende CM. Beweise unter der Voraussetzung $\angle CLA = 45°$, dass AL senkrecht auf CM steht.

Lösung. Sei K so auf der Geraden durch B und C gewählt, dass C der Mittelpunkt von KB ist. Da M der Mittelpunkt von AB ist, sind KA und CM laut Strahlensatz parallel und es gilt $|KA| = 2\,|CM| = |AL|$. Die Punkte K und L liegen also auf einem Kreis mit Mittelpunkt A, siehe auch Abbildung 3.

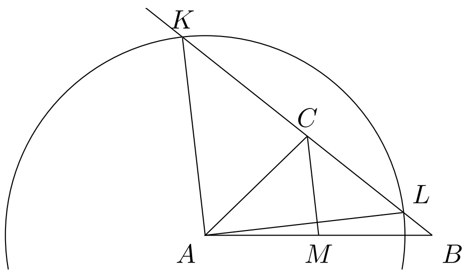

Abbildung 3: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.4.

Da K und L auf dem Kreisrand liegen und A der Mittelpunkt des Kreises ist, sind die Winkel $\angle AKL$ und $\angle KLA = \angle CLA$ identisch, also nach Aufgabenstellung beide 45°. Somit ist $\angle LAK$ ein rechter Winkel. Da KA und CM parallel sind, stehen also auch AL und CM senkrecht aufeinander. □

Aufgabe M.5 (6 P.)**.** Ali Baba und die 40 Räuber wollen den Bosporus überqueren (die Meerenge zwischen Europa und Kleinasien). Sie haben sich so in einer Reihe aufgestellt, dass jeweils diejenigen, die nebeneinander stehen, auch befreundet sind. Am Anfang steht Ali Baba und der Räuber neben seinem Nachbarn ist ebenfalls Ali Babas Freund. Es gibt nur ein Boot, dass nur zwei oder drei Personen tragen kann, die alle befreundet sein müssen. Eine einzelne Person kann nicht allein segeln. Können Ali Baba und die 40 Räuber in jedem Fall die Meerenge überqueren?

Lösung von Sandra Albrechtsen. Ja, Ali Baba und die 40 Räuber können die Meerenge überqueren.

Zuerst fahren Ali Baba (A) und die Räuber 1 (R1) und 2 (R2) in dem Boot über die Meerenge. Dies ist möglich, da Ali Baba mit beiden befreundet ist (und R1 und R2 auch). Dann fährt A mit R1 zurück. Nun können R3 und R4 über die Meerenge fahren. Anschließend fahren R2 und R3 zurück. Nun können A, R1 und R2 über die Meerenge fahren. Danach fahren R1 und R2 zurück, R2 und R3 überqueren die Meerenge, A und R2 fahren zurück und A, R1 und R2 überqueren die Meerenge. Nun sind A, R1, R2, R3 und R4 auf der anderen Seite.

Ab jetzt verwenden sie so lange folgende Fahrtreihenfolge, bis alle Räuber auf der anderen Seite sind:

Zuerst fahren A und R1 zurück. Nun können 2 neue Räuber (die beiden, die in der Reihe als nächstes kommen) die Meerenge überqueren. Dann fahren R2 und R3 zurück, A, R1 und R2 überqueren die Meerenge, A und R2 fahren zurück, R2 und R3 überqueren die Meerenge, R1 und R2 fahren zurück und A, R1 und R2 überqueren die Meerenge. Nun sind alle Räuber, die vorher auf der anderen Seite waren, und zwei neue Räuber dort. Dies kann solange wiederholt werden, bis alle Räuber die Meerenge überquert haben. Da der Anfangszustand A, R1, R2, R3 und R4 auf der einen Seite war und immer genau zwei Räuber dazukommen, ist der verbliebene Rest gerade und kein Räuber bleibt am Ende alleine zurück. □

Alternative Lösung. Ali Baba und seine vierzig Räuber können den Bosperus überqueren. Dazu können sie zum Beispiel wie im Folgenden dargestellt nacheinander erst den in der Schlange ganz hinten stehenden Räuber über das Ufer bringen, dann den vorletzten und so weiter, bis ab dem dritten Räuber der Reihe alle auf der anderen Seite sind. Zwischendurch kehren jeweils alle in der Reihe vor dem jeweiligen Räuber stehenden Räuber mit Ali Baba wieder zurück zum Ausgangsufer.

Dies geschieht, indem zuerst Ali Baba und der erste und zweite Räuber in der Reihe auf die andere Seite fahren. Falls der Räuber, der nun dauerhaft auf die andere Seite gebracht werden soll (zuerst der letzte, dann der vorletzte usw.), in der Schlange eine gerade Position unter den Räubern hat (zum Beispiel der 40.), so fahren dann Ali Baba und der erste Räuber wieder zurück. Dann fährt der dritte mit dem vierten zum Zielufer und der dritte fährt mit dem zweiten wieder zurück zum Ausgangsufer. Auf diese Weise fahren immer die nächsten beiden Räuber zum Zielufer, der mit der früheren Position der Reihe fährt mit seinem bei der vorherigen Überfahrt dorthin gebrachten Nachbarn zurück und der mit der späteren Position der Reihe bleibt. Als nächstes fährt also der fünfte mit dem sechsten Räuber zum Zielufer und der fünfte fährst mit dem vierten zurück usw.

Ist die Position ungerade, so fährt Ali Baba mit dem zweiten zurück. Ansonsten wird wie eben beschrieben verfahren: Der zweite und der dritte Räuber fahren zum Zielufer und der zweite fährt mit dem ersten wieder zurück, der vierte und fünfte Räuber fahren hin und der vierte mit dem dritten zurück usw.

Zuletzt fährt Ali Baba mit den nur noch verbliebenen ersten beiden Räubern ans Zielufer.

Bemerkung: Dieser Algorithmus benötigt deutlich mehr Überfahrten als der der ersten Lösung. □

O Oberstufe

Aufgabe O.1 (4 P.). Inspector Gadget hat 36 Steine mit den Massen 1 Gramm, 2 Gramm, . . . , 36 Gramm. Doctor Claw hat einen Superkleber, von dem ein Tropfen zwei Steine zu einem Stein zusammenkleben kann (also zwei Tropfen kleben drei Steine zusammen usw.). Doctor Claw möchte einige Steine so zusammenkleben, dass in der so erhaltenen Menge an Steinen Inspector Gadget nicht mehr einen oder mehrere davon auswählen kann, so dass deren Gesamtmasse genau 37 Gramm beträgt. Finde die kleinste Anzahl an Tropfen, die Doctor Claw benötigt, um dies zu erreichen.

Lösung. Die kleinste Anzahl an Tropfen, die Doctor Claw benötigt, ist 9: Weniger als 9 Tropfen reichen nicht aus, da von den 18 Paaren, die zusammen jeweils 37 Gramm ergeben ($1 + 36$, $2 + 35$, $\dots$) aus jedem zumindest ein Stein verklebt sein muss und jeder Tropfen maximal zwei neue Steine verklebt.

Mit 9 Tropfen ist es möglich, indem man zum Beispiel mit jedem Tropfen zwei ungerade Gewichte miteinander verklebt, so dass die erhaltene Menge an Steinen nur noch aus geraden Gewichten besteht. (Alternativ kann man zum Beispiel auch die Gewichte von 1 Gramm bis 18 Gramm jeweils in Paaren zu 19 Gramm verkleben, so dass die erhaltene Menge an Steinen nur noch aus Gewichten von mindestens 19 Gramm besteht.) $\square$

Aufgabe O.2 (4 P.)**.** Im konvexen Viereck $ABCD$ stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander. Die Punkte M und N liegen auf den Seiten AD bzw. CD, so dass die Winkel $\angle NBA$ und $\angle CBM$ beide rechte Winkel sind. Beweise, dass die Geraden AC und MN parallel sind.

Lösung. Den Schnittpunkt der Diagonalen bezeichnen wir mit O. Außerdem seien P und Q die Schnittpunkte von BD mit den zu AC parallelen Geraden durch M beziehungsweise N, siehe auch Abbildung 4. Wir zeigen, dass $P = Q$ gilt, dann sind die zu AC parallelen Geraden durch M beziehungsweise N identisch und somit MN parallel zu AC.

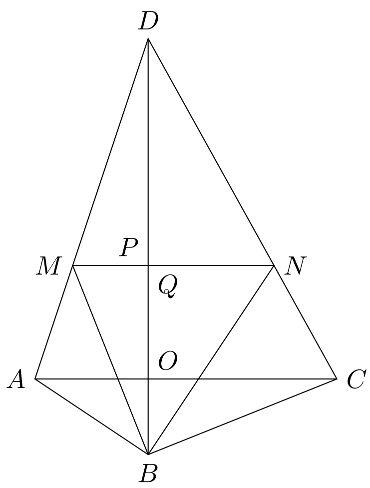

Abbildung 4: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.2.

Da P und Q beide auf der Diagonalen BD liegen, genügt es zu zeigen, dass

$$\frac{|BP|}{|DP|} = \frac{|BQ|}{|DQ|}$$

gilt. Hierzu verwenden wir, dass die Längenverhältnisse der Seiten ähnlicher Dreiecke identisch sind.

Die Dreiecke $\triangle DPM$ und $\triangle DOA$ sind ähnlich, da MP und AO parallel sind. Ebenso sind $\triangle DQN$ und $\triangle DOC$ ähnlich. Somit gilt

$$\begin{array}{lccc} & \frac{|MP|}{|DP|} = \frac{|AO|}{|DO|} & \Longrightarrow & |MP| = |DP| \cdot \frac{|AO|}{|DO|} \\ \text{und} & \frac{|NQ|}{|DQ|} = \frac{|CO|}{|DO|} & \Longrightarrow & |NQ| = |DQ| \cdot \frac{|CO|}{|DO|}. \end{array}$$

Die Dreiecke $\triangle BPM$ und $\triangle COB$ sind ebenfalls ähnlich: Sie haben beide einen rechten Winkel und es gilt $\angle OCB = 90° - \angle CBO = \angle OBM = \angle PBM$. Ebenso sind auch $\triangle BQN$ und $\triangle AOB$ ähnlich. Wir erhalten

$$\begin{array}{lccc} & \frac{|MP|}{|BP|} = \frac{|BO|}{|CO|} & \Longrightarrow & |MP| = |BP| \cdot \frac{|BO|}{|CO|} \\ \text{und} & \frac{|NQ|}{|BQ|} = \frac{|BO|}{|AO|} & \Longrightarrow & |NQ| = |BQ| \cdot \frac{|BO|}{|AO|}. \end{array}$$

Wir haben also

$$\begin{array}{lccc} & |DP| \cdot \frac{|AO|}{|DO|} = |BP| \cdot \frac{|BO|}{|CO|} & \Longrightarrow & \frac{|DP|}{|BP|} = \frac{|BO| \cdot |DO|}{|CO| \cdot |AO|} \\ \text{und} & |DQ| \cdot \frac{|CO|}{|DO|} = |BQ| \cdot \frac{|BO|}{|AO|} & \Longrightarrow & \frac{|DQ|}{|BQ|} = \frac{|BO| \cdot |DO|}{|CO| \cdot |AO|}. \end{array}$$

Somit haben wir

$$\frac{|BP|}{|DP|} = \frac{|BQ|}{|DQ|}$$

gezeigt und daher bewiesen, dass MN und AC parallel sind. □

Aufgabe O.3 (5 P.)**.** Ali Baba und die 40 Räuber wollen den Bosporus überqueren (die Meerenge zwischen Europa und Kleinasien). Sie haben sich so in einer Reihe aufgestellt, dass jeweils diejenigen, die nebeneinander stehen, auch befreundet sind. Am Anfang steht Ali Baba und der Räuber neben seinem Nachbarn ist ebenfalls Ali Babas Freund. Es gibt nur ein Boot, dass nur zwei oder drei Personen tragen kann, die alle befreundet sein müssen. Eine einzelne Person kann nicht allein segeln. Können Ali Baba und die 40 Räuber in jedem Fall die Meerenge überqueren?

Lösung. Siehe Lösung von Aufgabe M.5. □

Aufgabe O.4 (5 P.)**.** Die positiven ganzen Zahlen a, b, c und d seien paarweise teilerfremd und erfüllen die Gleichung

$$ab + cd = ac - 10bd.$$

Beweise, dass man immer drei dieser Zahlen auswählen kann, so dass eine der Zahlen gerade die Summe der beiden anderen ist.

Lösung. Aus der gegebenen Gleichung erhält man sofort

$$11bd = ac + bd - ab - cd = (a - d)(c - b).$$

Also ist insbesondere $(a - d)(c - b)$ durch bd teilbar. Da a und d sowie c und b teilerfremd sind, gilt dies auch für $a-d$ und d sowie $c-b$ und b. Also muss $(a-d)$ durch b sowie $(c - b)$ durch d teilbar sein. Es gilt also $xb = (a - d)$, $yd = (c - b)$ für geeignete ganze Zahlen x und y. Wegen $11bd = (a - d)(c - b) = xybd$ gilt $xy = 11$, also gilt entweder $x = \pm 1, y = \pm 11$ oder $x = \pm 11, y = \pm 1$. Gilt $x = 1$, so gilt $a - d = b$, also $a = b + d$; gilt dagegen $x = -1$, so ist $a - d = -b$, also $a + b = d$. Ist im anderen Fall $y = 1$, so gilt $c - b = d$, also $c = b + d$; gilt $y = -1$, so ist $c - b = -d$, also $c + d = b$. In jedem Fall lässt sich eine der Zahlen als Summe von zwei anderen darstellen, es können also immer drei Zahlen so ausgewählt werden, wie in der Aufgabenstellung gefordert. □

Aufgabe O.5 (5 P.)**.** Die Wege eines großen Parks bilden die Seiten und Diagonalen eines konvexen Vierecks $ABCD$. Alex beginnt bei A und wandert entlang AB, BC und CD. Ben wandert entlang AC; er verlässt A gleichzeitig mit Alex und erreicht C gleichzeitig mit Alex. Chris wandert entlang BD; er verlässt B zum gleichen Zeitpunkt, als Alex an B vorbeikommt, und erreicht D gleichzeitig mit Alex. Kann es passieren, dass Ben und Chris gleichzeitig den Punkt O erreichen, welcher der Schnittpunkt von AC und BD sei? Die Geschwindigkeit der Wanderer sei jeweils konstant.

Lösung. Es ist nicht möglich, dass Ben und Chris gleichzeitig Punkt O erreichen. Alex muss mit größerer Geschwindigkeit sowohl als Ben als auch als Chris laufen, da er von A bis C bzw. von B bis D nicht direkt läuft, sondern über B bzw. C, was jeweils ein weiterer Weg ist (Dreiecksungleichung).

Wenn Ben und Chris sich bei O träfen, liefen Chris von B zu O und Ben von O zu C zusammen in genau der Zeit, in der Alex direkt von B zu C läuft. Da Chris und Ben beide langsamer laufen als Alex, können sie den längeren Weg nicht in derselben Zeit zurücklegen wie Alex den kürzeren, nämlich den direkten (wieder Dreiecksungleichung). □

Alternative Lösung. Es ist nicht möglich, dass Ben und Chris gleichzeitig Punkt O erreichen. Angenommen, es wäre möglich. Es seien A' und D' die Punkte auf der Geraden BC, die durch Drehung von A um B bzw. D um C entstehen, so dass $\angle CBA' = \angle D'CB = 180°$ ist (siehe Abbildung 5).

Wenn Alex jetzt gedacht mit konstanter Geschwindigkeit entlang $A'BC$ läuft, während Ben ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit entlang AC läuft, so ist die Verbindung von Alex und Ben jeweils parallel zu AA'. Während Ben bei O ist, ist Alex also beim Punkt O_A auf BC, so dass OO_A parallel zu AA' liegt. Analog ist Alex bei O_D, so dass OO_D parallel zu DD' liegt, wenn Chris bei O ist. Treffen sich Ben und Chris bei O, so muss O_A gleich O_D sein, AA' und DD' müssen also parallel liegen. Dies ist jedoch nicht möglich, da A und D auf derselben Seite von BC liegen (auf Grund der Konvexität des Vierecks $ABCD$) und die Innenwinkel bei A' und D' in den gleichschenkligen Dreiecken $\Delta A'BA$ bzw. $\Delta DCD'$ jeweils kleiner als $90°$ sein müssen. □

Fragen und Anmerkungen. Schicken Sie diese bitte an *Städtewettbewerb Mathematik Hamburg* <stw.m.hh@gmail.com>. An den Lösungen haben mitgewirkt: Christian Elbracht, Berenice Neumann, Mara Sommerfeld, Philipp Sprüssel und Jan Henrik Sylvester.

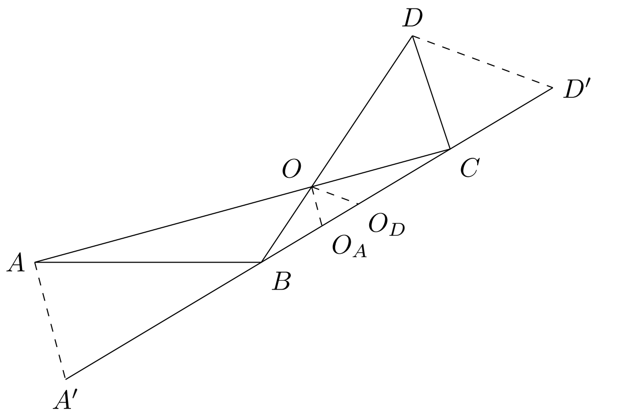

Abbildung 5: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.5.