

M Mittelstufe

Aufgabe 1 (4 P.). In einer quadratischen Tabelle sind die Hälfte der Einträge Plus(zeichen), die andere Hälfte Minus. Beweise, dass zumindest zwei Zeilen oder zwei Spalten dieselbe Anzahl an Plus enthalten.

Aufgabe 2 (5 P.). Beweise, dass jedes Vieleck, das einen Inkreis besitzt, drei Seiten hat, die ein Dreieck bilden können.

Aufgabe 3 (6 P.). Ist es möglich, alle positiven Teiler von $100!$ (inklusive 1 und $100!$) so in zwei Gruppen aufzuteilen, dass jede Gruppe dieselbe Anzahl an Zahlen hat und das Produkt der Zahlen der ersten Gruppe gleich dem der Zahlen der zweiten Gruppe ist?

Aufgabe 4 (7 P.). An einer kreisförmigen Straße sind in gleichen Abständen (zum jeweiligen Vorgänger und Nachfolger) 25 Polizisten platziert. Jeder Polizist trägt eine Marke mit einer eindeutigen Nummer von 1 bis 25. Die Polizisten bekommen eine Anweisung, so ihre Positionen zu vertauschen, dass ihre Marken entlang der Strecke im Uhrzeigersinn aufeinanderfolgend von 1 bis 25 nummeriert sind. Beweise: Wenn die Polizisten beim Tauschen alle zusammen eine möglichst geringe Strecke entlang der Straße zurücklegen möchten, dann bleibt mindestens einer an seiner ursprünglichen Position.

Aufgabe 5 (8 P.). In einem rechtwinkligen Dreieck werden zwei Kreise mit gleichen Radien so konstruiert, dass sie sich gegenseitig berühren und jeder die Hypotenuse und je eine Kathete berührt. Seien M und N die Berührungspunkte der Kreise mit der Hypotenuse. Beweise, dass der Mittelpunkt von MN auf der Winkelhalbierenden des rechten Winkels des Dreiecks liegt.

Aufgabe 6 (8 P.). Eine positive ganze Zahl heiße *einfach*, wenn sie nur eine Ziffer enthält – möglicherweise mehrfach (Beispiele: 4, 111, 999999). Beweise, dass jede n -stellige Zahl als Summe von höchstens $n + 1$ einfachen Zahlen geschrieben werden kann.

Aufgabe 7. Ein quadratisches Spinnennetz bestehe aus 100×100 Knotenpunkten (also 99×99 Zellen). 100 Fliegen werden im Netz gefangen, die an 100 (paarweise) verschiedenen Knoten hängen geblieben sind. Eine Spinne startet in einer Ecke des Netzes und bewegt sich jeweils von einem Knotenpunkt zu einem benachbarten, zählt dabei die Züge und frisst jede Fliege, der sie begegnet. Kann die Spinne in jedem Fall alle Fliegen fressen in nicht mehr als

(a) (5 P.) 2100 Zügen bzw.

(b) (5 P.) 2000 Zügen?

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden.

Viel Erfolg!

O Oberstufe

Aufgabe 1 (4 P.). Beweise, dass jedes Vieleck, das einen Inkreis besitzt, drei Seiten hat, die ein Dreieck bilden können.

Aufgabe 2 (6 P.). An einer kreisförmigen Straße sind in gleichen Abständen (zum jeweiligen Vorgänger und Nachfolger) 25 Polizisten platziert. Jeder Polizist trägt eine Marke mit einer eindeutigen Nummer von 1 bis 25. Die Polizisten bekommen eine Anweisung, so ihre Positionen zu vertauschen, dass ihre Marken entlang der Strecke im Uhrzeigersinn aufeinanderfolgend von 1 bis 25 nummeriert sind. Beweise: Wenn die Polizisten beim Tauschen alle zusammen eine möglichst geringe Strecke entlang der Straße zurücklegen möchten, dann bleibt mindestens einer an seiner ursprünglichen Position.

Aufgabe 3 (6 P.). Gregory hat 100 Zahlen auf eine Tafel geschrieben und deren Produkt berechnet. Dann hat er jede Zahl um 1 erhöht und dabei beobachtet, dass sich das Produkt aller nicht verändert hat. Daraufhin hat er wieder alle Zahlen um 1 erhöht und wieder hat sich das Produkt nicht verändert. Diese Prozedur hat er k -mal ausgeführt und jedes Mal dasselbe Produkt erhalten. Finde den größtmöglichen Wert von k .

Aufgabe 4 (7 P.). Ein Kreis sei in ein Dreieck $\triangle ABC$ eingeschrieben und berühre die Seiten BC , CA und AB an den Punkten A' , B' bzw. C' . Die drei Geraden AA' , BB' und CC' treffen sich im Punkt G . Es seien C_A und C_B die Schnittpunkte des Umkreises um das Dreieck $\triangle GA'B'$ mit den Geraden AC bzw. BC , die nicht B' bzw. A' sind. Analog seien A_B , A_C , B_C und B_A definiert. Beweise, dass die Punkte C_A , C_B , A_B , A_C , B_C und B_A auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

Aufgabe 5 (7 P.). Pete zählt alle möglichen Wörter bestehend aus m Buchstaben, so dass jeder Buchstabe nur „T“, „O“, „W“ oder „N“ ist und so dass das Wort gleich viele „T“s und „O“s enthält. Basil zählt alle möglichen Wörter bestehend aus $2m$ Buchstaben, so dass nur die Buchstaben „T“ und „O“ vorkommen und zwar gleich häufig. Welcher der beiden Jungen hat mehr Wörter gezählt?

Aufgabe 6 (8 P.). Es gab ein Dreieck aus Draht mit Innenwinkeln x° , y° und z° . Der schelmische Nick hat jede Seite in je einem Punkt um 1 Grad verbogen und dadurch ein Sechseck mit Innenwinkeln $(x - 1)^\circ$, 181° , $(y - 1)^\circ$, 181° , $(z - 1)^\circ$ und 181° erhalten. Beweise, dass die Biegepunkte die Seiten des ursprünglichen Dreiecks jeweils im selben Verhältnis teilen.

Aufgabe 7 (10 P.). In einem Königreich werden Gold- und Platinsand als Währungen benutzt. Der Wechselkurs wird durch zwei positive ganze Zahlen g und p definiert, so dass x Gramm Gold y Gramm Platin entsprechen, wenn $xg = yp$ (dabei müssen x und y nicht notwendig ganzzahlig sein). An einem Tag, an dem die Zahlen $g = p = 1001$ sind, verkündet das Schatzamt, dass an jedem der folgenden Tage genau eine der Zahlen g und p um 1 verkleinert wird, so dass beide Zahlen nach 2000 Tagen 1 sind. Allerdings wird die genaue Abfolge, in welche die Zahlen verringert werden, nicht verkündet. An dem Tag hat ein Bäcker 1 kg Goldsand und 1 kg Platinsand. Das Ziel des Bäckers ist nun, in der Zeitspanne so Tauschgeschäfte zu machen, dass er am Ende mindestens 2 kg Goldsand und 2 kg Platinsand hat. Kann er dieses Ziel in jedem Fall erreichen?

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden.

Viel Erfolg!