Städtewettbewerb Herbst 2014 Lösungsvorschläge

Hamburg

4. November 2014 [Version 7. Januar 2015]

M Mittelstufe

Aufgabe M.1 (4 P.). In einer quadratischen Tabelle sind die Hälfte der Einträge Plus(zeichen), die andere Hälfte Minus. Beweise, dass zumindest zwei Zeilen oder zwei Spalten dieselbe Anzahl an Plus enthalten.

LÖSUNG. n sei die Anzahl der Felder pro Zeile oder Spalte. Da die Tabelle $\frac{n^2}{2}$ Pluszeichen enthält, muss n gerade sein. Es gibt $n+1$ mögliche Anzahlen von Pluszeichen in einer Zeile, nämlich 0, 1, ..., n. Falls keine zwei Zeilen dieselbe Anzahl von Pluszeichen haben, kommt also nur eine dieser Zahlen nicht vor. Die Summe der Zahlen von 0 bis n beträgt

$$\begin{aligned} 0+1+2+\cdots n &= (1+n)+(2+n-1)+\cdots+(\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+1) \\ &= \frac{n}{2}(n+1) = \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Also entspricht jede dieser $n+1$ Zahlen außer $\frac{n}{2}$ der Anzahl von Pluszeichen einer Zeile, insbesondere gibt es eine Zeile, die nur aus Pluszeichen besteht, und eine Zeile ohne Pluszeichen. Jede Spalte enthält dann also mindestens 1 und höchstens $n-1$ Pluszeichen. Da es nur $n-1$ mögliche Anzahlen und n Spalten gibt, haben dann mindestens zwei Spalten die gleiche Anzahl von Pluszeichen. □

Aufgabe M.2 (5 P.). Beweise, dass jedes Vieleck, das einen Inkreis besitzt, drei Seiten hat, die ein Dreieck bilden können.

LÖSUNG. In einem Vieleck mit Inkreis ist jede Seite kürzer als die Summe der Längen ihrer beiden benachbarten Seiten: Auf zwei benachbarten Seiten sind die Abstände von den Berührpunkten mit dem Inkreis bis zur gemeinsamen Ecke gleich groß. Jede Seite ist also genauso lang wie die beiden Strecken zwischen jeweils einer Ecke der Seite und dem Berührpunkt der daran angrenzenden Seite mit dem Inkreis zusammen.

Wählt man eine Seite des Vielecks mit maximaler Länge, lässt sich daher aus ihr und ihren beiden benachbarten Seiten ein Dreieck bilden. □

Aufgabe M.3 (6 P.). Ist es möglich, alle positiven Teiler von 100! (inklusive 1 und 100!) so in zwei Gruppen aufzuteilen, dass jede Gruppe dieselbe Anzahl an Zahlen hat und das Produkt der Zahlen der ersten Gruppe gleich dem der Zahlen der zweiten Gruppe ist?

Lösung. Ja, es ist möglich die Teiler von 100! so in zwei Gruppen aufzuteilen.

Zunächst stellen wir fest, dass 100! keine Quadratzahl ist: Die Primzahlen 89 und 97 sind beide ein Teiler von 100!, der in der Primfaktorzerlegung von 100! genau einmal auftaucht (100! ist das Produkt der Zahlen von 1 bis 100, von diesen ist nur die Zahl 97 durch 97 teilbar und das nur einmal und nur die Zahl 89 durch 89 teilbar und auch dass nur einmal). Wenn 100! eine Quadratzahl wäre, also $100! = x^2$ gilt, so müsste 97 auch in der Primfaktorzerlegung von x auftauchen, damit aber mindestens zweimal in der Primfaktorzerlegung von 100! erscheinen.

Da 100! keine Quadratzahl ist, gibt es für jeden Teiler a von 100! einen anderen Teiler b von 100!, sodass $a \cdot b = 100!$ gilt (wir betrachten $\frac{100!}{a}$, diese Zahl ist nicht identisch zu a, weil 100! sonst eine Quadratzahl wäre). Folglich können wir die Teiler von 100! zu Paaren zusammenfassen, deren Produkt jeweils 100! ist.

Wenn wir jetzt noch zeigen, dass die Anzahl dieser Paare gerade ist, haben wir eine Zerlegung der Teiler in zwei Gruppen gefunden, die die Bedingungen erfüllt: Wir verteilen die Paare gleichmäßig auf die beiden Gruppen, dann enthalten beide Gruppen gleich viele Elemente, und da das Produkt von den Elementen eines Paares jeweils 100! ist, ist auch das Produkt aller Elemente der einen Gruppe gleich dem Produkt aller Elemente der anderen Gruppe (nämlich gerade die Anzahl der Paare in der Gruppe multipliziert mit 100!).

In der Primfaktorzerlegung eines Teiler von 100! gibt es vier Möglichkeiten bezüglich der Primfaktoren 89 und 97: Keiner oder einer von beiden kommt vor oder beide kommen vor. Also ist die Anzahl der Teiler von 100! durch 4 teilbar, die Anzahl der Paare von Teilern also gerade. □

Aufgabe M.4 (7 P.)**.** An einer kreisförmigen Straße sind in gleichen Abständen (zum jeweiligen Vorgänger und Nachfolger) 25 Polizisten platziert. Jeder Polizist trägt eine Marke mit einer eindeutigen Nummer von 1 bis 25. Die Polizisten bekommen eine Anweisung, so ihre Positionen zu vertauschen, dass ihre Marken entlang der Strecke im Uhrzeigersinn aufeinanderfolgend von 1 bis 25 nummeriert sind. Beweise: Wenn die Polizisten beim Tauschen alle zusammen eine möglichst geringe Strecke entlang der Straße zurücklegen möchten, dann bleibt mindestens einer an seiner ursprünglichen Position.

Lösung. Jeder Polizist kann mit oder gegen den Uhrzeigersinn laufen, um von seiner Ausgangsposition an seine Zielposition zu gelangen. Dabei wählt er von beiden Varianten eine möglichst kurze. Falls kein Polizist stehen bleibt, laufen mehr Polizisten in die eine Richtung als in die andere Richtung. Ohne Einschränkung sei angenommen, dass sich die Mehrheit im Uhrzeigersinn bewegt. Wenn dann alle Polizisten statt zu ihrer Zielposition zu der um eine Position gegen den Uhrzeigersinn verschobenen Position laufen würden, würde die Mehrheit der Polizisten eine um den Abstand zwischen zwei Positionen kleinere Strecke zurücklegen und alle anderen würden eine höchstens um diesen Abstand längere Strecke laufen. Falls kein Polizist stehen bleibt, lässt sich die insgesamt zurück gelegte Strecke also in jedem Fall verkleinern. □

Aufgabe M.5 (8 P.)**.** In einem rechtwinkligen Dreieck werden zwei Kreise mit gleichen Radien so konstruiert, dass sie sich gegenseitig berühren und jeder die Hypotenuse und je eine Kathete berührt. Seien M und N die Berührpunkte der Kreise mit der Hypotenuse. Beweise, dass der Mittelpunkt von MN auf der Winkelhalbierenden des rechten Winkels des Dreiecks liegt.

LÖSUNG. Es sei W der Mittelpunkt von MN. Die Schnittpunkte der Senkrechten auf AB durch W mit AC und BC seien W_A bzw. W_B (siehe Abbildung 1). Damit sind die Dreiecke $\triangle W_AWA$ und $\triangle BWW_B$ rechtwinklig und haben jeweils einen gemeinsamen Winkel mit $\triangle BCA$, sie sind also ähnlich. Sie sind sogar kongruent, da die gleich großen Kreise der Aufgabenstellung die Inkreise der Dreiecke sind, weil WW_A bzw. WW_B die Mittelsenkrechte der gemeinsamen Tangente MN an die Kreise ist.

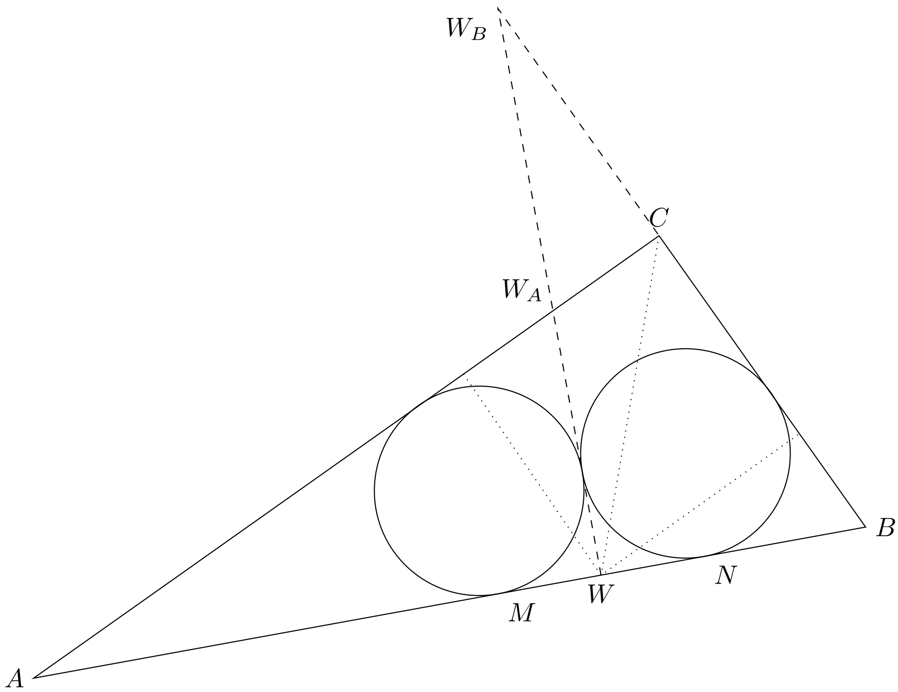

Abbildung 1: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.5.

Da $\triangle W_AWA$ und $\triangle BWW_B$ kongruent sind, sind die Lote von W auf AC und BC gerade zwei entsprechende Höhen in den Dreiecken, also insbesondere gleich lang. Dass die Lote auf AC und BC gleich lang sind, ist aber gerade die Eigenschaft der Punkte auf der Winkelhalbierenden von $\angle ACB$, welche somit durch W geht. $\square$

Aufgabe M.6 (8 P.)**.** Eine positive ganze Zahl heiße *einfach*, wenn sie nur eine Ziffer enthält – möglicherweise mehrfach (Beispiele: 4, 111, 999999). Beweise, dass jede n-stellige Zahl als Summe von höchstens $n+1$ einfachen Zahlen geschrieben werden kann.

LÖSUNG. Wir zeigen im Folgenden, dass jede positive ganze Zahl von 1 bis zu der aus n Einsen gebildeten Zahl als Summe von höchstens n einfachen Zahlen geschrieben werden kann. Offensichtlich kann dann jede n-stellige Zahl als Summe von höchstens $n+1$ einfachen Zahlen dargestellt werden.

Für $n = 1$ ist diese Behauptung offensichtlich wahr. Im Folgenden zeigen wir, dass für $n > 1$ gilt, dass sich jede der Zahlen von 1 bis zu der aus n Einsen gebildeten Zahl als Summe einer einfachen Zahl oder 0 und einer der Zahlen von 0 bis zu der aus $n-1$ Einsen gebildeten Zahl schreiben lässt. Da die Behauptung für $n = 1$ wahr ist, folgt dann daraus, dass sich jede der Zahlen von 1 bis 11 als Summe von höchstens 2 einfachen Zahlen schreiben lässt, daraus folgt dann wiederum, dass sich alle Zahlen von 1 bis 111 aus als Summe von höchstens 3 einfachen Zahlen darstellen lässt usw. Insgesamt folgt die Behauptung für jedes n.

Die aus n Einsen gebildete Zahl ist selbst eine einfache Zahl. Wir nehmen daher im folgenden an, das x eine kleinere positive ganze Zahl ist. x ist also höchstens so groß wie das Zehnfache der aus aus $n - 1$ Einsen gebildeten Zahl. Alle kleineren Vielfachen dieser Zahl, sind 0 oder eine einfache Zahl, also lässt sich x als eine Summe von zwei Zahlen schreiben, von denen eine 0 oder eine einfache Zahl und die andere nicht größer als die aus $n - 1$ Einsen gebildeten Zahl ist. □

Aufgabe M.7. Ein quadratisches Spinnennetz bestehe aus 100×100 Knotenpunkten (also 99×99 Zellen). 100 Fliegen werden im Netz gefangen, die an 100 (paarweise) verschiedenen Knoten hängen geblieben sind. Eine Spinne startet in einer Ecke des Netzes und bewegt sich jeweils von einem Knotenpunkt zu einem benachbarten, zählt dabei die Züge und frisst jede Fliege, der sie begegnet. Kann die Spinne in jedem Fall alle Fliegen fressen in nicht mehr als

(a) (5 P.) 2100 Zügen bzw.

(b) (5 P.) 2000 Zügen?

Lösung. (a) Die Spinne kann alle Fliegen in weniger als 2100 Zügen fressen. Um dies zu beweisen, konstruieren wir einen Weg durch das Netz, welcher in der Ecke des Netzes beginnt, in der die Spinne startet. Dieser Weg wird eine Länge von weniger als 1300 Zügen haben und für jeden Knotenpunkt des Netzes wird er zu irgendeinem Zeitpunkt in einer Entfernung von höchstens 4 Zügen vorbei führen. Die Spinne kann dann den Weg entlang laufen und jedes Mal, wenn sie sich in einer Entfernung von höchstens 4 zu einer Fliege befindet, diese in insgesamt höchstens 8 Zügen fressen und wieder zum Punkt zurückkehren, an welchem sie den Weg verlassen hat. Auf diese Art benötigt die Spinne weniger als

$$1300 + 8 \cdot 100 = 2100$$

Züge, um alle Fliegen zu fressen.

Wir müssen also lediglich den oben behaupteten Weg konstruieren. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Spinne in der unteren linken Ecke startet. (Ansonsten denken wir uns das Netz derart gedreht, dass dies der Fall ist.) Der Weg verläuft nun zunächst 4 Züge nach rechts und dann 99 Züge nach oben, so dass er am oberen Rand des Netzes angekommen ist. Danach verläuft er 9 Züge nach rechts und 99 Züge nach unten, dann 9 Züge nach rechts und 99 Züge nach oben und so weiter. Sobald der rechte Rand des Netzes erreicht ist, verläuft der Weg noch die letzte Spalte entlang und endet dann. Wenn die Spalten des Netzes von links nach rechts nummeriert sind, dann durchläuft der Weg also die Spalten 5, 14, 23, 32, 41, 50, 59, 68, 77, 86, 95 und 100. Da zu jeder Spalte des Netzes eine Spalte im Abstand höchstens 4 durchlaufen wird, führt der Weg also an allen Knotenpunkten im Abstand höchstens 4 vorbei.

Wir müssen nur noch die Länge des Weges bestimmen. Er durchläuft genau 12 Spalten und führt dazwischen insgesamt 99 Züge nach rechts. Insgesamt ist seine Länge also $13 \cdot 99 = 1287$. Dies ist kleiner als 1300, was wir erreichen wollten.

(b) Auch in höchstens 2000 Zügen kann die Spinne alle Fliegen fressen. Dazu betrachten wir die Spalten 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82 und 91. Dies sind zehn Spalten und diese können also nicht alle 11 oder mehr Fliegen enthalten. Die Spalte k sei eine dieser Spalten und enthalte höchstens 10 Fliegen. Den oben konstruierten Weg verändern wir nun ein wenig: Wir haben die zehn Spalten so gewählt, dass der ursprüngliche Weg die Spalte $k-5$ durchläuft. Bis zum Durchlauf dieser Spalte lassen wir den Weg unverändert. Nun führt der neue Weg 10 Züge nach rechts statt wie bisher 9. Danach durchläuft er wie der alte Weg immer eine Spalte, führt 9 Züge nach rechts, durchläuft die nächste Spalte und so weiter, bis er Spalte 96 erreicht und durchlaufen hat. Für diesen neuen Weg liegen alle Knotenpunkte im Netz in Entfernung höchstens 4 bis auf die Knotenpunkte in Spalte k, welche Entfernung 5 haben (bis auf einige Knotenpunkte am Rand der Spalte, welche einen kleineren Abstand haben).

Der neue Weg hat Länge $11 \cdot 99 + 95 = 1184$, da er 11 Spalten durchläuft (jeweils 99 Züge) und insgesamt 95 Schritte nach rechts führt. Um sämtliche Fliegen vom Weg aus zu erreichen, benötigt die Spinne für die Hinwege insgesamt höchstens $90 \cdot 4 + 10 \cdot 5 = 410$ Züge. Für die Rückwege benötigt sie insgesamt höchstens $89 \cdot 4 + 10 \cdot 5 = 406$ Züge, da sie von der letzten gefressenen Fliege nicht mehr zum Weg zurück muss. Dies macht $1184 + 410 + 406 = 2000$ Züge, in denen die Spinne in jedem Fall alle Fliegen fressen kann. □

O Oberstufe

Aufgabe O.1 (4 P.)**.** Beweise, dass jedes Vieleck, das einen Inkreis besitzt, drei Seiten hat, die ein Dreieck bilden können.

Lösung. Siehe Lösung von Aufgabe M.2. □

Aufgabe O.2 (6 P.)**.** An einer kreisförmigen Straße sind in gleichen Abständen (zum jeweiligen Vorgänger und Nachfolger) 25 Polizisten platziert. Jeder Polizist trägt eine Marke mit einer eindeutigen Nummer von 1 bis 25. Die Polizisten bekommen eine Anweisung, so ihre Positionen zu vertauschen, dass ihre Marken entlang der Strecke im Uhrzeigersinn aufeinanderfolgend von 1 bis 25 nummeriert sind. Beweise: Wenn die Polizisten beim Tauschen alle zusammen eine möglichst geringe Strecke entlang der Straße zurücklegen möchten, dann bleibt mindestens einer an seiner ursprünglichen Position.

Lösung. Siehe Lösung von Aufgabe M.4. □

Aufgabe O.3 (6 P.)**.** Gregory hat 100 Zahlen auf eine Tafel geschrieben und deren Produkt berechnet. Dann hat er jede Zahl um 1 erhöht und dabei beobachtet, dass sich das Produkt aller nicht verändert hat. Daraufhin hat er wieder alle Zahlen um 1 erhöht und wieder hat sich das Produkt nicht verändert. Diese Prozedur hat er k-mal ausgeführt und jedes Mal dasselbe Produkt erhalten. Finde den größtmöglichen Wert von k.

LÖSUNG. Der größtmögliche Wert für k ist 99.

99 ist tatsächlich möglich: Wenn Gregory die ganzen Zahlen von -99 bis 0 gewählt hat, kann Gregory 99 Male alle Zahlen um 1 erhöhen, so dass danach jeweils eine 0 darunter ist, also bleibt das Produkt dabei 0.

k kann nicht größer als 99 sein: Die Zahlen, die Gregory ursprünglich an die Tafel geschrieben hat, seien mit $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ bezeichnet. Dann ist das Polynom $(x + a_1)(x + a_2) \cdots (x + a_{100})$ ein normiertes Polynom vom Grad 100 mit den $k + 1$ Nullstellen $0, 1, \ldots, k$. Ein normiertes Polynom p vom Grad 100 kann höchstens 100 verschiedene Nullstellen haben: Für eine Nullstelle z_1 bleibt bei der Polynomdivision von p durch $(x - z_2)$ kein Rest, also lässt sich p als $q \cdot (x - z_2)$ mit einem normierten Polynom q vom Grad 99 schreiben. Eine von z_1 verschiedene Nullstelle z_2 von p ist auch Nullstelle von q, also lässt sich p als Produkt von $(x - z_1)(x - z_1)$ mit einem Polynom vom Grad 98 schreiben usw. Mehr als 100 verschiedene Nullstellen kann p also nicht haben. $\square$

Aufgabe O.4 (7 P.)**.** Ein Kreis sei in ein Dreieck ΔABC einbeschrieben und berühre die Seiten BC, CA und AB an den Punkten A', B' bzw. C'. Die drei Geraden AA', BB' und CC' treffen sich im Punkt G. Es seien C_A und C_B die Schnittpunkte des Umkreises um das Dreieck $\Delta GA'B'$ mit den Geraden AC bzw. BC, die nicht B' bzw. A' sind. Analog seien A_B, A_C, B_C und B_A definiert. Beweise, dass die Punkte C_A, C_B, A_B, A_C, B_C und B_A auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

LÖSUNG. Es wird gezeigt, dass C_A, C_B, A_B, A_C, B_C und B_A alle denselben Abstand zum Inkreismittelpunkt I des Dreiecks $\triangle ABC$ haben (siehe Abbildung 2) und somit auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

Es gilt $AB' = AC'$, da B' und C' Berührpunkte der Seiten mit dem Inkreis des Dreiecks $\triangle ABC$ sind. Da A_B, A_C, B' und C' auf einem Kreis liegen, gilt nach dem Sekantensatz $|AA_B| \cdot |AC'| = |AA_C| \cdot |AB'|$, mit $AB' = AC'$ also auch $AA_B = AA_C$. Die Mittelsenkrechte von $A_B A_C$ ist also die Winkelhalbierende des Winkels $\angle A_B A A_C$ und geht damit durch I, weshalb A_B und A_C denselben Abstand zu I haben. Analog haben auch B_A und B_C denselben Abstand zu I und C_A und C_B ebenfalls.

Da B', C_A, G und A' auf einem Kreis liegen, gilt $|AB'| \cdot |AC_A| = |AG| \cdot |AA'|$, genauso liegen G, A', C' und B_A auf einem Kreis und es gilt $|AG| \cdot |AA'| = |AC'| \cdot |AB_A|$. Zusammen hat man $|AB'| \cdot |AC_A| = |AG| \cdot |AA'| = |AC'| \cdot |AB_A|$ und mit $AB' = AC'$ insbesondere auch $AC_A = AB_A$. Die Mittelsenkrechte von C_A und B_A ist also ebenfalls die Winkelhalbierende des Winkels $\angle A_B A A_C$ und geht damit auch durch I, so dass C_A und B_A denselben Abstand zu I haben. Analogen haben auch A_B und C_B denselben Abstand zu I, also alle sechs Punkte C_A, C_B, A_B, A_C, B_C und B_A. $\square$

Bemerkung. Dass der sogenannte *Gergonne-Punkt* G für jedes Dreieck existiert, sich also die Geraden durch die Berührpunkte des Inkreises und den jeweils

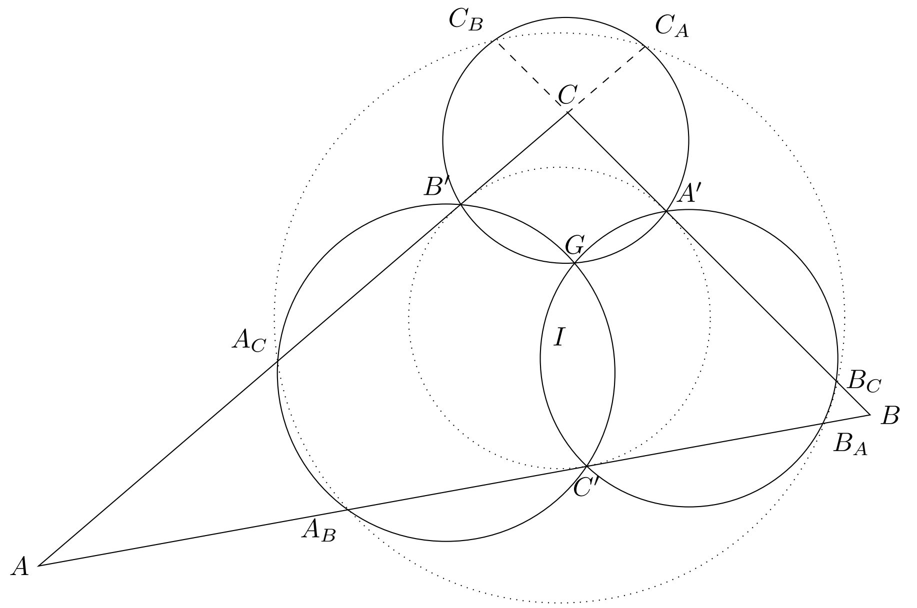

Abbildung 2: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.4.

gegenüberliegenden Dreieckspunkt stets in einem Punkt schneiden, war nicht Teil der Problemstellung. Dies kann man mit dem *Satz von Ceva* nachweisen.

Aufgabe O.5 (7 P.)**.** Pete zählt alle möglichen Wörter bestehend aus m Buchstaben, so dass jeder Buchstabe nur „T“, „O“, „W“ oder „N“ ist und so dass das Wort gleich viele „T“s und „O“s enthält. Basil zählt alle möglichen Wörter bestehend aus $2m$ Buchstaben, so dass nur die Buchstaben „T“ und „O“ vorkommen und zwar gleich häufig. Welcher der beiden Jungen hat mehr Wörter gezählt?

Lösung. Keiner der beiden Jungen hat mehr Wörter als der andere gezählt. Für jedes von Pete gezählte Wort erhält man eins der von Basil gezählten Wörter, indem man „T“ durch „TT“, „O“ durch „OO“, „W“ durch „TO“ und „N“ durch „OT“ ersetzt. Denn aus jedem Buchstaben werden zwei Buchstaben und da für jedes „T“ des alten Worts zwei „T“s ins neue geschrieben werden, ebenso jedes „O“ durch zwei „O“s ersetzt wird und für jeden anderen Buchstaben gleich viele „O“s und „T“s entstehen, enthält auch das neue Wort gleich viele „T“s und „O“s. Umgekehrt erhält man aus einem Wort von Basil eins von Pete, indem man von links beginnend jeweils zwei benachbarte Buchstaben zu einem Paar zusammenfasst und danach „TT“ durch „T“, „OO“ durch „O“, „TO“ durch „W“ und „OT“ durch „N“ ersetzt. Denn dabei wird die Anzahl der Buchstaben halbiert und da in allen Paaren „TO“ und „OT“ gleich viele „T“s und „O“s auftreten, gibt es auch gleich viele Paare der Form „OO“ wie der Form „TT“, so dass auch das neue Wort gleich viele „T“s und „O“s hat. Beginnt man mit einem Wort von Pete und führt nacheinander die beiden Ersetzungen durch, erhält man wieder das ursprüngliche Wort, ebenso ist es, falls man mit einem Wort von Basil startet und jeweils andersherum ersetzt. Also entspricht jedes von Pete gezählte Wort auf diese Weise genau einem von Basil gezählten Wort, beide zählen daher gleich viele Wörter. □

Aufgabe O.6 (8 P.)**.** Es gab ein Dreieck aus Draht mit Innenwinkeln $x°$, $y°$ und $z°$. Der schelmische Nick hat jede Seite in je einem Punkt um 1 Grad verbogen und dadurch ein Sechseck mit Innenwinkeln $(x-1)°$, $181°$, $(y-1)°$, $181°$, $(z-1)°$ und $181°$ erhalten. Beweise, dass die Biegepunkte die Seiten des ursprünglichen Dreiecks jeweils im selben Verhältnis teilen.

Lösung. Die Eckpunkte des Drahtdreiecks mit Innenwinkeln $x°$, $y°$ und $z°$ seien der Reihe nach mit X, Y und Z bezeichnet, die entsprechenden Punkte im Sechseck seien X', Y' und Z'. Wir nehmen an, dass der schelmische Nick den Draht zwischen X und Y an einer bestimmten Stelle um $1°$ verbogen hat und zeigen zunächst, dass dadurch eindeutig bestimmt ist, an welchen Stellen er die beiden anderen Drahtseiten verbiegen muss, um ein solches Sechseck zu erhalten: Z_X bezeichne den Punkt auf der Halbgeraden, die in X' beginnt und mit

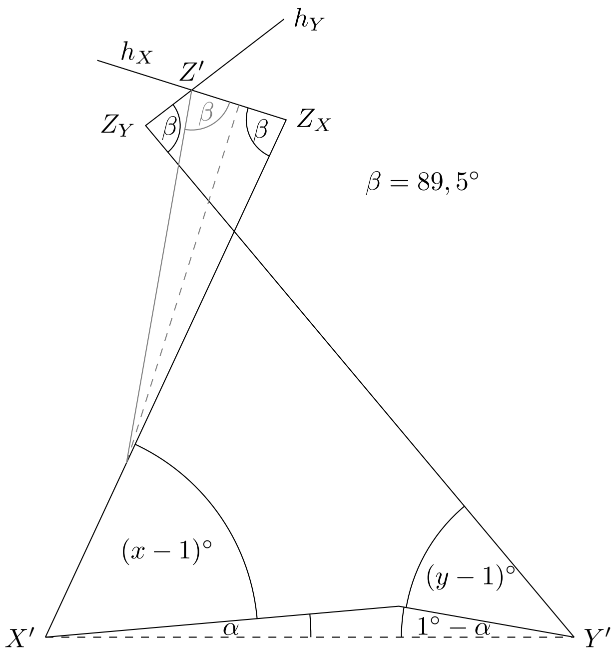

Abbildung 3: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.6.

der Strecke zwischen X' und dem Biegepunkt zwischen X' und Y' den Winkel $(x-1)°$ einschließt, der genauso weit von X' entfernt ist wie im ursprünglichen Dreieck Z von X. Im Sechseck bilden der Biegepunkt auf $X'Z_X$, Z_X und Z' ein gleichschenkliges Dreieck mit den Basiswinkeln $89,5°$ bei Z_X und Z', so dass Z' und Y' auf verschiedenen Seiten der Geraden durch $X'Z_X$ liegen. Z' muss also auf der Halbgeraden h_X liegen, die auf der von Y' abgewandten Seite mit der Strecke $X'Z_X$ den Winkel $89,5°$ einschließt. Analog konstruieren wir den Punkt Z_Y und die Halbgerade h_Y. Z' liegt also im Schnitt der Halbgeraden h_X und h_Y. Diese beiden Halbgeraden sind nicht parallel: Im von X', Y' und dem Biegepunkt zwischen X' und Y' gebildeten Dreieck ist der Innenwinkel beim Biegepunkt $179°$, die anderen beiden Innenwinkel sind also zusammen $1°$ groß. Daher schneiden sich die Geraden $X'Z_X$ und $Y'Z_Y$ im Winkel $(z+1)°$. Die Verlängerungen der Halbgeraden h_X und h_Y schneiden sich also im Winkel

$(180 - z)^\circ$. Zu X', Y' und dem Biegepunkt dazwischen, gibt es also höchstens einen Punkt, in dem Z' liegen könnte. Mit der Lage von Z' ist auch die Lage der beiden anderen Biegepunkte eindeutig bestimmt: Sie liegen auf dem Schnitt von $X'Z_X$ bzw. $Y'Z_Y$ mit der Mittelsenkrechten auf der Strecke $Z'Z_X$ bzw. $Z'Z_Y$. Nachdem Nick den Biegepunkt zwischen X und Y gewählt hat, gibt es also höchstens ein Sechseck mit diesem Biegepunkt und den beschriebenen Eigenschaften.

Nun zeigen wir, dass es für jede Wahl des Biegepunktes zwischen X und Y tatsächlich ein Sechseck mit den beschriebenen Eigenschaften gibt (sofern überhaupt $x - 1 > 0$, $y - 1 > 0$ und $z - 1 > 0$ gilt), in dem die Biegepunkte die Dreieckseiten im selben Verhältnis teilen.

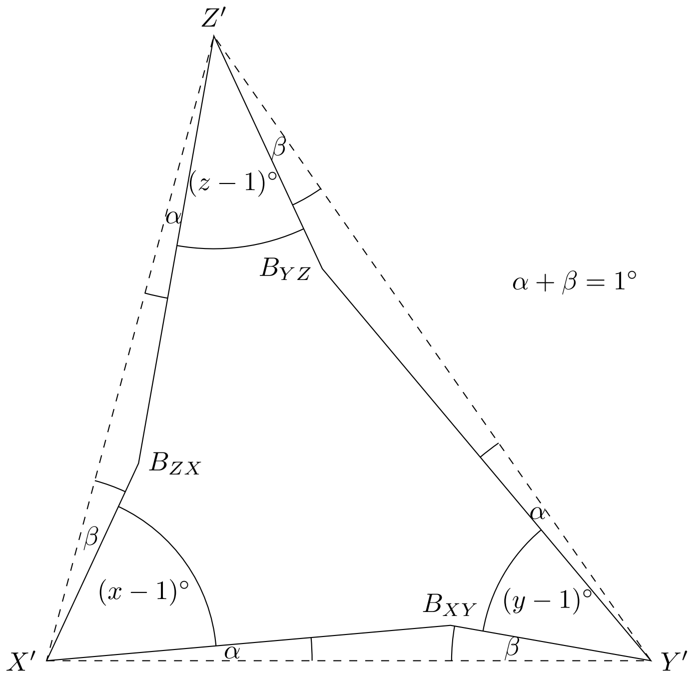

Abbildung 4: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.6.

Es seien also X', Y' und der Biegepunkt B_{XY} dazwischen gegeben. Ein solches Sechseck erhält man, indem man den neuen Punkt Z' so wählt, dass das Dreieck $\triangle X'Y'Z'$ ähnlich zum ursprünglichen Dreieck $\triangle XYZ$ ist und anschließend Punkte B_{YZ} und B_{ZX} so in Dreieck einzeichnet, dass die Dreiecke $\triangle X'B_{XY}Y'$, $\triangle Y'B_{YZ}Z'$ und $\triangle Z'B_{ZX}X'$ ähnlich sind mit dem gleichen Winkel $\alpha < 1$ bei X', Y' und Z' und dem Winkel 179° bei den Punkten B_{XY}, B_{YZ} und B_{ZX}. Das Sechseck $X'B_{XY}Y'B_{YZ}Z'B_{ZX}$ hat dann die Innenwinkel 181° bei B_{XY}, B_{YZ} und B_{ZX}, $(x-1)^\circ$ bei X', $(y-1)^\circ$ bei Y' und $(z-1)^\circ$ bei Z'. Da

$$\frac{|X'Y'|}{|XY|} = \frac{|Y'Z'|}{|YZ|} = \frac{|Z'X'|}{|ZX|}$$

und

$$\frac{|XB_{XY}| + |B_{XY}Y|}{|X'Y'|} = \frac{|YB_{YZ}| + |B_{YZ}Z|}{|Y'Z'|} = \frac{|ZB_{ZX}| + |B_{ZX}X|}{|Z'X'|}$$

folgt

$$\frac{|XB_{XY}|+|B_{XY}Y|}{|XY|}=\frac{|YB_{YZ}|+|B_{YZ}Z|}{|YZ|}=\frac{|ZB_{ZX}|+|B_{ZX}X|}{|ZX|}.$$

Da nach Konstruktion $1=\frac{|XB_{XY}|+|B_{XY}Y|}{|XY|}$ ist, sind also auch die anderen beiden Verhältnisse gleich 1. Das Sechseck kann deshalb durch Verbiegen der Drähte aus dem ursprünglichen Dreieck erzeugt werden. Die Innenwinkel sind wie in der Aufgabenstellung und die Biegepunkte teilen die Seiten im gleichen Verhältnis. $\square$

Aufgabe O.7 (10 P.)**.** In einem Königreich werden Gold- und Platinsand als Währungen benutzt. Der Wechselkurs wird durch zwei positive ganze Zahlen g und p definiert, so dass x Gramm Gold y Gramm Platin entsprechen, wenn $xg = yp$ (dabei müssen x und y nicht notwendig ganzzahlig sein). An einem Tag, an dem die Zahlen $g = p = 1001$ sind, verkündet das Schatzamt, dass an jedem der folgenden Tage genau eine der Zahlen g und p um 1 verkleinert wird, so dass beide Zahlen nach 2000 Tagen 1 sind. Allerdings wird die genaue Abfolge, in welche die Zahlen verringert werden, nicht verkündet. An dem Tag hat ein Bänker 1 kg Goldsand und 1 kg Platinsand. Das Ziel des Bänkers ist nun, in der Zeitspanne so Tauschgeschäfte zu machen, dass er am Ende mindestens 2 kg Goldsand und 2 kg Platinsand hat. Kann er dieses Ziel in jedem Fall erreichen?

Lösung. (Diese Lösung stammt im Wesentlichen aus den englischsprachigen Lösungen des Organisationskomitees in Russland.)

Nein, der Bänker kann sein Ziel nicht in jedem Fall erreichen. Wenn der Bänker anfangs 1 kg Goldsand und 1 kg Platinsand hat und $g = p = k$ gilt, so kann er am Ende zumindest von einer Sandsorte höchstens $2-\frac{1}{k}$ kg haben, bei anfangs $g = p = 1001$ also höchstens $2-\frac{1}{1001}$ kg. Stattdesssen wird im Folgenden angenommen, der Bänker habe anfangs $\frac{k}{2k-1}$ jedes Sandes. Es reicht dann zu zeigen, dass er am Ende nicht mehr als 1 von jedem Sand haben kann.

Es sei $S = Gp + Pg$ der *Zustand* des Bänkers, wenn dieser G Gold und P Platin besitzt. Dieser Zustand ändert sich nicht durch ein Tauschgeschäft. Es wird nun per vollständiger Induktion gezeigt, dass der maximale garantierte Zustand des Bänkers $\frac{2gp}{g+p-1}$ nicht übersteigt an einem Tag mit Tauschraten g und p. Am ersten Tag ist dies der Fall, der Zustand ist ja $\frac{k}{2k-1}p+\frac{k}{2k-1}g=\frac{2gp}{g+p-1}$ mit $k = g = p$. Um die Behauptung für alle Tage nachzuweisen, muss nun also unter der Annahme, dass sie an einem Tag gilt, gezeigt werden, dass sie dann auch am nächsten Tag gilt.

Trifft die Annahme an einem Tag zu, so gilt

$$Gp \geq \frac{g-1}{g+p-2}S \quad \text{oder} \quad Pg \geq \frac{p-1}{g+p-2}S,$$

man sieht dies wie folgt ein: Ist $Gp=\frac{g-1}{g+p-2}S$, so ist

$$Pg = S - Gp = \left(1-\frac{g-1}{g+p-2}\right)S=\frac{p-1}{g+p-2}S,$$

für beide Ungleichungen gilt dann also Gleichheit. Anderenfalls ist entweder Gp größer, so dass die erste Ungleichung gilt, oder Pg größer, so dass die zweite gilt.

Ohne Einschränkung wird angenommen, dass die erste Ungleichung gilt, die Argumentation für den anderen Fall ist analog mit p und g vertauscht sowie G und P vertauscht. Es ist also

$$G \geq \frac{g-1}{g+p-2} \cdot \frac{S}{p}.$$

Ist $p > 1$, kann es sein, dass nun das Schatzamt p um 1 reduziert, es wird also G vom Zustand abgezogen. Der neue Zustand ist nun

$$\begin{aligned} S - G &\leq \left(p - \frac{g-1}{g+p-2}\right) \cdot \frac{S}{p} = \frac{pg + p^2 - 2p - g + 1}{g+p-2} \cdot \frac{S}{p} \\ &\overset{\text{Induktionsannahme}}{\leq} \frac{(p-1)(p+g-1)}{g+p-2} \cdot \frac{2g}{g+p-1} = \frac{2g(p-1)}{g+(p-1)-1}, \end{aligned}$$

was gerade die Induktionsannahme am nächsten Tag ist, also mit $p-1$ statt p.

Nur wenn $g > p = 1$ gilt, kann es nicht sein, dass das Schatzamt p um 1 reduziert. Dann lautet die erste Ungleichung $G \cdot 1 \geq \frac{g-1}{g+1-2} S = S$. Wegen $S = G \cdot 1 + Pg$, kann $G > S$ nicht sein, weshalb nur die Gleichheit für die Ungleichung in Frage kommt. Dann gilt aber auch die zweite Ungleichung, so dass die Argumentation mit $g > 1$ wieder analog zu der eben geführt werden kann nur mit p und g vertauscht sowie G und P vertauscht.

Am letzten Tag ist $g = p = 1$, der maximale garantierte Zustand übersteigt also nicht $\frac{2gp}{g+p-1} = 2$, die Menge zumindest der einen Sandart ist also höchstens 1. □

Bemerkung. Die Abschätzung für den maximalen garantierten Zustand ist scharf, der Bänker kann erreichen, dass der Zustand an jedem Tag $\frac{2gp}{g+p-1}$ beträgt, indem er seine Tauschgeschäfte so tätigt, dass immer genau $\frac{G}{P} = \frac{g(g-1)}{p(p-1)}$ gilt. Am letzten Tag hat er dann den Zustand 2 und kann so tauschen, dass er genau 1 von jedem Sand hat.

Fragen und Anmerkungen. Schicken Sie diese bitte an *Städtewettbewerb Mathematik Hamburg* <stw.m.hh@gmail.com>. An den Lösungen haben mitgewirkt: Christian Elbracht, Mara Sommerfeld, Philipp Sprüssel und Jan Henrik Sylvester.