Städtewettbewerb Frühjahr 2015
Lösungsvorschläge

Hamburg

17. März 2015 [Version 9. April 2015]

M Mittelstufe

Aufgabe M.1 (3 P.). Ist es möglich, die Seiten eines Würfels so mit drei Farben anzumalen, dass jede Farbe vorkommt, man aber von jedem Punkt höchstens zwei Farben sehen kann? (Von jedem Punkt kann man nur Seiten sehen, die alle eine gemeinsame Ecke haben.)

Lösung. Es ist möglich: Man bemale mit den ersten beiden Farben zwei gegenüberliegende Seiten und mit der dritten die restlichen. Da man zwei gegenüberliegende Seiten niemals gleichzeitig sehen kann, ist höchstens die erste mit der dritten oder die zweite mit der dritten Farbe von einem beliebigen Punkt zu sehen. □

Aufgabe M.2 (4 P.). Die Punkte K und L liegen so auf der Seite AB eines Dreiecks $\triangle ABC$, dass $|KL| = |BC|$ und $|AK| = |LB|$ gilt. Ferner sei M der Mittelpunkt der Seite AC. Beweise, dass $\angle KML = 90°$.

Lösung. Zusätzlich zu den in der Aufgabe definierten Punkten bezeichnen wir mit N den Mittelpunkt der Seite AB, siehe Abbildung 1.

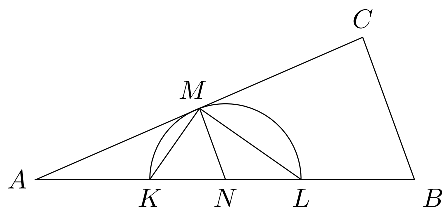


Abbildung 1: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.2.

Da M und N jeweils die Mittelpunkte von AC und AB sind, gilt laut Strahlensatz $|NM| = \frac{1}{2}|BC|$. Wegen der Bedingung $|AK| = |LB|$ ist N auch der Mittelpunkt der Strecke KL und somit gilt

$$|NK| = |NL| = \frac{1}{2}|KL| = \frac{1}{2}|BC|.$$

Somit sind die Entfernungen von N zu den drei Punkten K, L und M identisch, diese drei Punkte liegen also auf einem Kreis mit Mittelpunkt N, wobei KL ein

Durchmesser dieser Kreises ist. Der Satz des Thales sagt uns nun, dass $\angle KML$ ein rechter Winkel ist. □

Aufgabe M.3 (4 P.)**.** Pete addiert 10 aufeinanderfolgende Zweierpotenzen beginnend mit einer beliebigen, während Basil mehrere aufeinanderfolgende natürliche Zahlen beginnend mit der 1 aufsummiert. Können beide dasselbe Ergebnis erhalten?

Lösung. Beide können dasselbe Ergebnis erhalten: Ist die kleinste Zweierpotenz von Pete 2^ℓ, so ist die Summe seiner 10 Zweierpotenzen

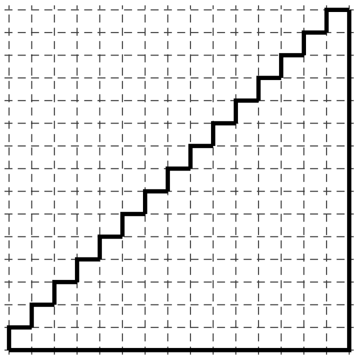
$$2^\ell + 2^{\ell+1} + \ldots + 2^{\ell+10-1} = 2^\ell \cdot \left(1 + 2 + \ldots + 2^{10-1}\right) = 2^\ell \cdot \left(2^{10} - 1\right) .$$

Ist Basils größte Zahl m, so ist die Summe seiner Zahlen

$$1 + 2 + \ldots + m = \frac{m \cdot (m+1)}{2} .$$

$2 \cdot 2^\ell$ und $2^{10} - 1$ sollten also aufeinanderfolgende Zahlen sein, was (genau) für $\ell = 10 - 1$ der Fall ist. Für $m = 2^{10} - 1$ sind die beiden Summen dann gleich. □

Aufgabe M.4 (4 P.)**.** Eine 15-stufige Treppe mit senkrechter und waagerechter Basis sei in ein Gitter eingezeichnet (siehe Abbildung). Welches ist die kleinste Anzahl an Quadraten, in die man die Treppe aufteilen kann. (Die Aufteilung darf nur entlang der Gitterlinien erfolgen.)



Lösung. Die Treppe lässt sich in 15 Quadrate aufteilen. Eine solche Aufteilung ist in Abbildung 2 zu sehen.

Nun zeigen wir noch, dass eine Aufteilung mit weniger Quadraten nicht möglich ist: Ein 1×1-Quadrat, welches sich an der diagonalen Seite der Treppe befindet, nennen wir *Stufe*. Ein Quadrat im Inneren der Treppe kann jeweils nur eine Stufe enthalten – da es 15 Stufen gibt, sind mindestens 15 Quadrate notwendig. □

Aufgabe M.5 (5 P.)**.** Es seien $2n + 1$ ganze Zahlen gegeben: einmal die 0 und je zweimal jede der Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Für welche Zahlen n kann man die $2n + 1$ Zahlen so anordnen, dass für jedes $m = 1, \ldots, n$ jeweils genau m Zahlen zwischen den zwei Zahlen m stehen?

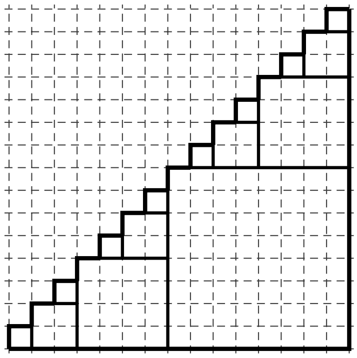


Abbildung 2: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.4.

LÖSUNG. Man kann die $2n + 1$ Zahlen für jedes n so anordnen: Abgesehen von n schreibe man alle ungeraden Paare „ineinander“, also zuerst alle absteigend, dann n als Platzhalter und danach alle aufsteigend. Dann schreibe man alle geraden Paare ineinander, wobei 0 und danach n zwischen den beiden Zweien stehen. Zwischen den beiden Zahlen n steht dann jede Zahl von 0 bis $n - 1$ genau einmal, also die richtige Anzahl an Zahlen, zwischen allen anderen Paaren offensichtlich auch. Beispiel:

$$7\,5\,3\,1\,8\,1\,3\,5\,7\,6\,4\,2\,0\,8\,2\,4\,6$$

□

O Oberstufe

Aufgabe O.1 (3 P.). Pete addiert 100 aufeinanderfolgende Zweierpotenzen beginnend mit einer beliebigen, während Basil mehrere aufeinanderfolgende natürliche Zahlen beginnend mit der 1 aufsummiert. Können beide dasselbe Ergebnis erhalten?

LÖSUNG. Siehe Lösung von Aufgabe M.3, wobei jede 10 durch 100 ersetzt werden soll. □

Aufgabe O.2 (4 P.). Eine Motte hat vier kleine Löcher in einen quadratischen Teppich mit Kantenlänge 275 cm gefressen. Kann man immer ein quadratisches Stück mit 1 m Kantenlänge ohne Loch ausschneiden? (Betrachte jedes Loch als Punkt.)

LÖSUNG. Ja, es ist immer möglich. Der Teppich enthält die folgenden fünf Quadrate mit mindestens 1 m Kantenlänge ohne gemeinsame innere Punkte: Die vier Quadrate mit 1 m Kantenlänge an den Ecken des Teppichs und das Quadrat, dessen Seitenmittelpunkte die im Teppichinneren liegenden Eckpunkte der anderen vier Quadrate sind (siehe Abbildung 3).

Da die Fläche mittleren Quadrats doppelt so groß ist wie Fläche des Quadrats aus seinen Seitenmittelpunkten, beträgt sie

$$2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \mathrm{m}^2 = \frac{9}{8}\,\mathrm{m}^2 > 1\,\mathrm{m}^2.$$

Also ist die Kantenlänge des mittleren Quadrats größer als 1 m.

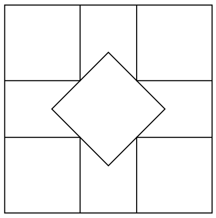


Abbildung 3: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.2.

Da mindestens eins der fünf Quadrate kein Loch im Inneren hat, kann man in jedem Fall ein Stück mit 1 m Kantenlänge ohne Loch ausschneiden. □

Aufgabe O.3 (4 P.)**.** Es seien $2n+1$ ganze Zahlen gegeben: einmal die 0 und je zweimal jede der Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Für welche Zahlen n kann man die $2n+1$ Zahlen so anordnen, dass für jedes $m = 1, \ldots, n$ jeweils genau m Zahlen zwischen den zwei Zahlen m stehen?

Lösung. Siehe Lösung von Aufgabe M.5. □

Aufgabe O.4 (5 P.)**.** Im Dreieck $\triangle ABC$ werde die Seitenhalbierende AM durch die Punkte K und L gedrittelt, es gelte also $|AK| = |KL| = |LM| = \frac{1}{3}|AM|$. Der Punkt P sei so gewählt, dass die Dreiecke $\triangle KPL$ und $\triangle ABC$ ähnlich sind ($\frac{|KP|}{|AB|} = \frac{|PL|}{|BC|} = \frac{|KL|}{|AC|}$) und dass P und C auf derselben Seite der Geraden AM liegen. Beweise, dass P auf der Geraden AC liegt.

Lösung. Es sei Q der Mittelpunkt der Strecke PL, siehe Abbildung 4. Weil die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle KPL$ ähnlich sind, sind auch $\triangle AMC$ und $\triangle KQL$ ähnlich und insbesondere $\angle MAC = \angle LKQ$. Daher sind AC und KQ parallel.

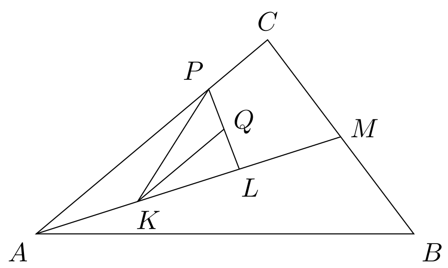


Abbildung 4: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.4.

Andererseits ist $\frac{|AL|}{|KL|} = \frac{|PL|}{|QL|} = 2$ und somit sind laut der Umkehrrichtung des Strahlensatzes AP und KQ parallel. Also sind auch AC und AP parallel und P liegt auf der Geraden durch A und C. □

Aufgabe O.5 (5 P.)**.** 2015 positive ganze Zahlen seien so im Kreis angeordnet, dass die Differenz zweier benachbarter Zahlen jeweils mit derem größten gemeinsamen Teiler (ggT) übereinstimmt. Ermittle die größte Zahl N, die in jedem Fall ein Teiler des Produktes dieser 2015 Zahlen sein muss.

Lösung. Die größte solche Zahl ist $N = 2^{1009} \cdot 3$: Da keine zwei ungeraden Zahlen nebeneinanderstehen können, sind mindestens 1008 der Zahlen gerade und es gibt mindestens ein Paar benachbarter gerader Zahlen, weil 2015 ungerade ist. Mindestens eine Zahl aus diesem Paar muss durch 4 teilbar sein, andernfalls wäre ihre Differenz durch 4 teilbar, aber keine der beiden Zahlen. Also ist das Produkt der Zahlen durch 2^{1009} teilbar. Da keine zwei Zahlen nebeneinanderstehen können, die beide den Rest 1 oder beide den Rest 2 bei der Division durch 3 lassen und da 2015 ungerade ist, muss mindestens eine der Zahlen durch 3 teilbar sein. Daher teilt N in jedem Fall das Produkt der Zahlen. N ist tatsächlich die größte Zahl mit dieser Eigenschaft: Eine mögliche solche Anordnung beginnt irgendwo im Kreis mit 4 und 3, danach folgen mit 2 beginnend immer abwechselnd 2 und 1, so dass vor der 4 eine 2 steht. Das Produkt dieser Zahlen ist gerade N. □

Fragen und Anmerkungen. Schicken Sie diese bitte an *Städtewettbewerb Mathematik Hamburg* <stw.m.hh@gmail.com>. An den Lösungen haben mitgewirkt: Mara Sommerfeld, Philipp Sprüssel und Jan Henrik Sylvester.