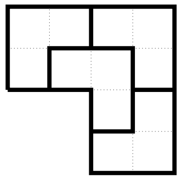
M Mittelstufe



Aufgabe 1. Ein Gitterpolygon ist ein Vieleck, dessen Seiten entlang der Linien eines quadratischen Gitters verlaufen. Ein Gitterpolygon heißt *fantastisch*, falls es kein Rechteck ist und sich mehrere seiner Kopien zu einem ähnlichen Gitterpolygon zusammensetzen lassen. Zum Beispiel ist eine Ecke bestehend aus drei Zellen ein fantastisches Polygon (siehe Abbildung rechts).

(a) (2 P.) Finde ein fantastisches Polygon, das aus genau 4 Zellen besteht.

(b) (3 P.) Ermittle alle $n > 4$, für die ein fantastisches Polygon existiert, das aus genau n Zellen besteht.

Aufgabe 2. Eine Menge bestehe aus allen ganzen Zahlen von 1 bis 100 mit Ausnahme von k dieser Zahlen. Ist es stets möglich, k verschiedene Zahlen dieser Menge auszuwählen, so dass deren Summe 100 beträgt, wenn

(a) (2 P.) $k = 9$ bzw.

(b) (4 P.) $k = 8$ ist?

Aufgabe 3. Beweise, dass in einem beliebigen Dreieck die Summe der Längen zweier Seitenhalbierenden stets

(a) (3 P.) nicht größer ist als $\frac{3}{4} \cdot U$ mit dem Umfang U des Dreiecks.

(b) (5 P.) nicht kleiner ist als $\frac{3}{4} \cdot u$ mit dem halben Umfang u des Dreiecks.

Aufgabe 4 (8 P.)**.** Aus Streichhölzern wird ein quadratisches 9×9-Gitter gelegt: Jede Seite einer Zelle besteht aus einem Streichholz und zwei benachbarte Zellen teilen sich genau ein Streichholz. Pete und Basil ziehen abwechselnd, indem sie jeweils ein Streichholz entfernen. Ein Spieler gewinnt, wenn nach dessen Zug kein vollständiges 1×1-Quadrat mehr übrig ist. Welcher Spieler hat eine Gewinnstrategie?

Aufgabe 5 (8 P.)**.** In einem Dreieck $\triangle ABC$ schneiden sich die Seitenhalbierenden AA_0, BB_0 und CC_0 im Punkt M. P, Q, R und T seien die Umkreismittelpunkte der Dreiecke $\triangle MA_0B_0$, $\triangle MCB_0$, $\triangle MC_0A_0$ bzw. $\triangle MC_0B$. Beweise, dass sich P, Q, R, T und M auf einem gemeinsamen Kreis befinden.

Aufgabe 6. Einige verschiedene reelle Zahlen stehen auf einer Tafel. Peter möchte einen Term (einen Ausdruck) hinschreiben, dessen Ergebnisse genau diese Zahlen sind. Um den Term zu schreiben, darf er verwenden: beliebige reelle Zahlen, Klammern und die üblichen Rechenzeichen $+$, $-$ und $\cdot$ (Multiplikationspunkt). Außerdem darf er das spezielle Zeichen $\pm$ nutzen: Der Term wird mit $+$ und $-$ für jedes $\pm$ in jeder Kombination einmal ausgewertet. Der Term 5 ± 1 erzeugt zum Beispiel $\{4, 6\}$ und $(2 \pm 0.5) \pm 0.5$ erzeugt $\{1, 2, 3\}$. Kann Peter einen Term finden

(a) (3 P.) für genau die Zahlen 1, 2 und 4 an der Tafel bzw.

(b) (7 P.) für jede Auswahl von 100 verschiedenen reellen Zahlen an einer Tafel?

Aufgabe 7 (10 P.)**.** Der Weihnachtsmann hat n Sorten Bonbons und k Bonbons von jeder Sorte. Er verteilt sie zufällig auf k Geschenkbeutel mit jeweils n Bonbons und gibt die Beutel an k Kinder. Die Kinder kucken sich den Inhalt ihrer Beutel an und beginnen zu tauschen: Zwei Kinder können jeweils einen Bonbon tauschen, wenn jedes dadurch einen Bonbon erhält, den es noch nicht hat. Kann die Reihenfolge der Tauschaktionen immer so angeordnet werden, dass am Ende jedes Kind Bonbons von jeder Sorte hat?

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden. Viel Erfolg!

O Oberstufe

Aufgabe 1 (3 P.)**.** 37 positive ganze Zahlen bilden eine geometrische Folge, also eine Folge, bei der das Verhältnis benachbarter Folgenglieder immer dasselbe ist. Das erste und letzte Folgenglied sind teilerfremd. Beweise, dass das 19te Folgenglied die 18te Potenz einer positiven ganzen Zahl ist.

Aufgabe 2 (6 P.)**.** Ein quadratisches 10×10-Gitter sei entlang 80 innerer Einheitssegmente in 20 Polygone gleicher Fläche zerteilt. Beweise, dass diese Polygone alle kongruent zueinander sind.

Aufgabe 3 (6 P.)**.** Jeder Koeffizient eines nicht-konstanten Polynoms ist eine ganze Zahl, deren Betrag höchstens 2015 ist. Beweise, dass jede positive Nullstelle des Polynoms größer als $\frac{1}{2016}$ ist.

Aufgabe 4 (7 P.)**.** Das Viereck $ABCD$ sei in einen Kreis einbeschrieben (also ein Sehnenviereck). Die Verlängerungen gegenüberliegender Seiten schneiden sich in den Punkten P und Q. Die Mittelpunkte der Diagonalen seien K und N. Beweise, dass $\angle PKQ + \angle PNQ = 180°$.

Aufgabe 5. Einige verschiedene reelle Zahlen stehen auf einer Tafel. Peter möchte einen Term (einen Ausdruck) hinschreiben, dessen Ergebnisse genau diese Zahlen sind. Um den Term zu schreiben, darf er verwenden: beliebige reelle Zahlen, Klammern und die üblichen Rechenzeichen $+$, $-$ und $\cdot$ (Multiplikationspunkt). Außerdem darf er das spezielle Zeichen $\pm$ nutzen: Der Term wird mit $+$ und $-$ für jedes $\pm$ in jeder Kombination einmal ausgewertet. Der Term 5 ± 1 erzeugt zum Beispiel $\{4, 6\}$ und $(2 \pm 0.5) \pm 0.5$ erzeugt $\{1, 2, 3\}$. Kann Peter einen Term finden

(a) (2 P.) für genau die Zahlen 1, 2 und 4 an der Tafel bzw.

(b) (6 P.) für jede Auswahl von 100 verschiedenen reellen Zahlen an einer Tafel?

Aufgabe 6. Basil hat eine kugelförmige Wassermelone mit 20 cm Durchmesser. Mit einem langen Messer macht Basil drei Einschnitte, die jeweils (paarweise) senkrecht zueinander verlaufen. Jeder Einschnitt hat die Tiefe h, die Schnittfläche ist also ein Kreisausschnitt der Höhe h. Muss die Wassermelone in jedem Fall in mindestens zwei Stücke zerlegt worden sein, wenn

(a) (6 P.) $h = 17$ cm bzw.

(b) (6 P.) $h = 18$ cm ist?

Aufgabe 7 (12 P.)**.** N Kinder, die alle (paarweise) verschieden groß sind, stehen in einer Reihe (irgendwie angeordnet). Die folgende zweischrittige Prozedur wird wiederholt angewendet: Als Erstes wird die Reihe in so wenige Gruppen wie möglich geteilt, so dass innerhalb einer Gruppe alle Kinder von links nach rechts aufsteigend der Größe nach sortiert sind (dabei können Gruppen auch nur aus einem Kind bestehen). Als Zweites wird die Reihenfolge der Kinder innerhalb ihrer Gruppe genau umgedreht (die Kinder stehen also absteigend der Größe nach sortiert). Beweise, dass nach $N - 1$ solchen Umordnungen die Kinder in absteigender Reihenfolge von links nach rechts angeordnet sind.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden. Viel Erfolg!