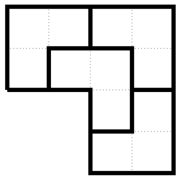
Städtewettbewerb Herbst 2015 Lösungsvorschläge

Hamburg

3. November 2015 [Version 30. November 2015]

M Mittelstufe



Aufgabe M.1. Ein Gitterpolygon ist ein Vieleck, dessen Seiten entlang der Linien eines quadratischen Gitters verlaufen. Ein Gitterpolygon heißt *fantastisch*, falls es kein Rechteck ist und sich mehrere seiner Kopien zu einem ähnlichen Gitterpolygon zusammensetzen lassen. Zum Beispiel ist eine Ecke bestehend aus drei Zellen ein fantastisches Polygon (siehe Abbildung rechts).

(a) (2 P.) Finde ein fantastisches Polygon, das aus genau 4 Zellen besteht.

(b) (3 P.) Ermittle alle $n > 4$, für die ein fantastisches Polygon existiert, das aus genau n Zellen besteht.

Lösung. Für jedes $n \geq 3$ existiert ein fantastisches Polygon aus genau n Zellen. Dieses besteht aus $n-1$ Zellen in einer Reihe nebeneinander und einer Zelle oberhalb der letzten dieser $n-1$ Zellen (siehe auch Abbildung 1).

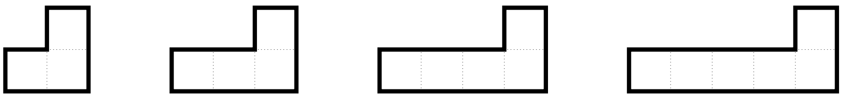


Abbildung 1: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.1. Fantastische Polygone mit 3, 4, 5 und 6 Zellen.

Aus zwei dieser Polygone lässt sich ein $n \times 2$-Rechteck zusammensetzen, aus $2n$ dieser Rechtecken dann wiederum ein $2n \times 2n$-Quadrat. Nun benötigt man nur noch n dieser Quadrate, um eine um den Faktor $2n$ größere Version des ursprünglichen Polygons zusammenzusetzen. □

Aufgabe M.2. Eine Menge bestehe aus allen ganzen Zahlen von 1 bis 100 mit Ausnahme von k dieser Zahlen. Ist es stets möglich, k verschiedene Zahlen dieser Menge auszuwählen, so dass deren Summe 100 beträgt, wenn

(a) (2 P.) $k = 9$ bzw.

(b) (4 P.) $k = 8$ ist?

Lösung. (a) Für $k = 9$ ist es nicht immer möglich, k verschiedene Zahlen der Menge auszuwählen, deren Summe 100 beträgt. Wenn die Menge aus den Zahlen von 1 bis 100 mit Ausnahme der Zahlen 1 bis 9 besteht, sind die kleinsten 9 Zahlen der Menge die Zahlen von 10 bis 18. Deren Summe beträgt aber bereits $90 + \frac{8 \cdot 9}{2} = 126$, die Summe anderer 9 Zahlen der Menge ist noch größer, also ist jede Summe größer als 100.

(b) Für $k = 8$ ist es stets möglich, k verschiedene Zahlen der Menge auszuwählen, deren Summe 100 beträgt. Von den 12 Paaren $(1, 24)$, $(2, 23)$, $\ldots$, $(12, 13)$ können nur aus 8 Paaren Zahlen nicht zur Menge gehören, aus 4 Paaren gehören also beide Zahlen zur Menge. Die Summe der 8 Zahlen dieser 4 Paare beträgt gerade $4 \cdot 25 = 100$. □

Aufgabe M.3. Beweise, dass in einem beliebigen Dreieck die Summe der Längen zweier Seitenhalbierenden stets

(a) (3 P.) nicht größer ist als $\frac{3}{4} \cdot U$ mit dem Umfang U des Dreiecks.

(b) (5 P.) nicht kleiner ist als $\frac{3}{4} \cdot u$ mit dem halben Umfang u des Dreiecks.

LÖSUNG. Seien A_0 und C_0 die Mittelpunkte von BC bzw. AB sowie S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden (siehe Abbildung 2). Dieser teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis $1 : 2$, also $|AS| = 2 \cdot |SA_0|$ und $|CS| = 2 \cdot |SC_0|$. (Eine alternative Lösung ohne Ausnutzung dieser Tatsache ist unten angegeben.) Es gilt außerdem $|A_0C_0| = \frac{1}{2}|AC|$ (Strahlensatz).

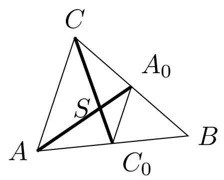


Abbildung 2: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.3.

(a) Dreiecksungleichungen in den Dreiecken $\triangle A_0AC_0$, $\triangle C_0CA_0$ und $\triangle C_0A_0S$ ergeben

$$\begin{aligned} |A_0A| &\le |C_0A| + |C_0A_0| = \frac{1}{2}|AB| + \frac{1}{2}|CA|, \\ |C_0C| &\le |CA_0| + |C_0A_0| = \frac{1}{2}|BC| + \frac{1}{2}|CA|, \\ \frac{1}{2}|CA| = |C_0A_0| &\le |A_0S| + |C_0S| = \frac{1}{3}|A_0A| + \frac{1}{3}|C_0C| \end{aligned}$$

und insgesamt $\frac{2}{3}(|A_0A| + |C_0C|) \le \frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |CA|) = \frac{1}{2} \cdot U$, also

$$|A_0A| + |C_0C| \le \frac{3}{4} \cdot U.$$

(b) Dreiecksungleichungen in den Dreiecken $\triangle AC_0S$, $\triangle C_AA_0S$ und $\triangle SA_0C$ ergeben

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|AB| = |AC_0| &\le |AS| + |SC_0| = \frac{2}{3}|AA_0| + \frac{1}{3}|CC_0|, \\ \frac{1}{2}|CA| = |A_0C_0| &\le |A_0S| + |SC_0| = \frac{1}{3}|AA_0| + \frac{1}{3}|CC_0|, \\ \frac{1}{2}|BC| = |A_0C| &\le |A_0S| + |SC| = \frac{1}{3}|AA_0| + \frac{2}{3}|CC_0| \end{aligned}$$

und summiert $u = \frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |CA|) \leq \frac{4}{3}(|AA_0| + |CC_0|)$, also

$$|AA_0| + |CC_0| \geq \frac{3}{4} \cdot u. \qquad \square$$

Alternative Lösung. (a) Das Dreieck sei $\triangle ABC$, C_0 sei der Mittelpunkt von AB und $\triangle A'B'C'$ das in C_0 punktgespiegelte Dreieck $\triangle ABC$, wobei $A = B'$ und $B = A'$ gilt (siehe Abbildung 3).

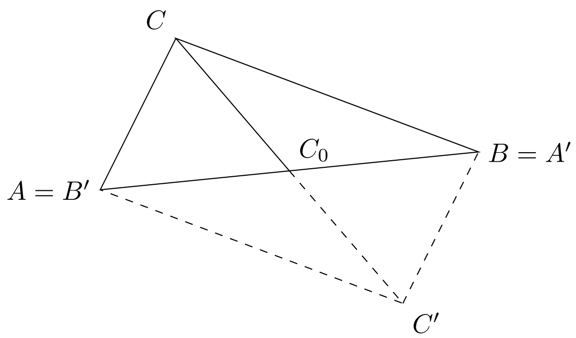


Abbildung 3: Zeichnung zur alternativen Lösung von Aufgabe M.3, erster Teil.

Da C_0 Mittelpunkt von CC' ist, erhält man mit der Dreiecksungleichung für das Dreieck $\triangle B'C'C$

$$2\,|CC_0| = |CC'| \leq |B'C'| + |CB'| = |BC| + |CA|\,.$$

Spiegelt man $\triangle ABC$ am Mittelpunkt B_0 von AC, erhält man analog

$$2\,|BB_0| \leq |AB| + |BC|\,.$$

Also ist die Summe der Längen der Seitenhalbierenden CC_0 und BB_0 unter der Ausnutzung der Dreiecksungleichung $|BC| \leq |AB| + |CA|$

$$\begin{aligned} |CC_0| + |BB_0| &\leq \frac{1}{4}(2\,|AB| + 4\,|BC| + 2\,|CA|) \\ &\leq \frac{3}{4}(|AB| + |BC| + |CA|) = \frac{3}{4} \cdot U. \end{aligned}$$

(b) Zum Dreieck $\triangle ABC$ sei $\triangle A'B'C'$ das so verschobene, dass $A' = B$ gilt, und $\triangle A''B''C''$ das so verschobene, dass $A'' = B'$ gilt (siehe Abbildung 4).

Im Parallelogramm $ABC'C$ teilt der Schnittpunkt der Diagonalen diese jeweils in der Mitte, also ist $2\,|AA_0| = |AC'|$ mit dem Mittelpunkt A_0 von BC. Mit dem Mittelpunkt B_0'' von $B''C''$ und B_0 von BC ist analog $|C'B''| = 2\,|B''B_0''| = 2\,|BB_0|$. Mittels der Dreiecksungleichung für $\triangle AB''C'$ erhält man

$$2\,|AA_0| + 2\,|BB_0| \geq |AB''| = 3 \cdot |AB|\,, \text{ also } |AA_0| + |BB_0| \geq \frac{3}{2} \cdot |AB|$$

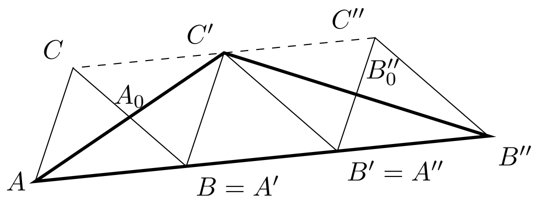


Abbildung 4: Zeichnung zur alternativen Lösung von Aufgabe M.3, zweiter Teil.

und analog

$$|BB_0| + |CC_0| \geq \frac{3}{2} \cdot |BC| \text{ und } |CC_0| + |AA_0| \geq \frac{3}{2} \cdot |CA|\,.$$

Aufsummieren und Halbieren liefert

$$|AA_0| + |BB_0| + |CC_0| \geq \frac{3}{4}(|AB| + |BC| + |CA|) = \frac{3}{4} \cdot U = \frac{3}{2} \cdot u.$$

Nun sei $\hat{C}$ der am Mittelpunkt C_0 von AB gespiegelte Punkt C und $\hat{C}'$ der am Mittelpunkt von $A'B'$ gespiegelte Punkt C' (siehe Abbildung 5).

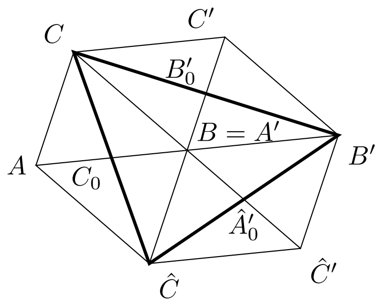


Abbildung 5: Zeichnung zur alternativen Lösung von Aufgabe M.3, zweiter Teil.

Das Dreieck $\triangle\hat{C}B'C$ setzt sich zusammen aus Diagonalen von drei Parallelogrammen, die jeweils aus zwei Kopien von $\triangle ABC$ bestehen. Die Seiten von $\triangle\hat{C}B'C$ bestehen jeweils aus zwei Kopien der Seitenhalbierenden von $\triangle ABC$, aus der Dreiecksungleichung $\left|\hat{C}B'\right| \leq |B'C| + \left|C\hat{C}\right|$ für $\triangle\hat{C}B'C$ folgt eine für die Seitenhalbierenden

$$|AA_0| \leq |BB_0| + |CC_0|\,.$$

Diese kann man nun in die Ungleichung oben einsetzen und erhält

$$2(|BB_0| + |CC_0|) \geq |AA_0| + |BB_0| + |CC_0| \geq \frac{3}{2} \cdot u,$$

also ist die Summe der Seitenlängen zweier Seitenhalbierender

$$|BB_0| + |CC_0| \geq \frac{3}{4} \cdot u. \qquad \square$$

Aufgabe M.4 (8 P.). Aus Streichhölzern wird ein quadratisches 9×9-Gitter gelegt: Jede Seite einer Zelle besteht aus einem Streichholz und zwei benachbarte Zellen teilen sich genau ein Streichholz. Pete und Basil ziehen abwechselnd, indem sie jeweils ein Streichholz entfernen. Ein Spieler gewinnt, wenn nach dessen Zug kein vollständiges 1×1-Quadrat mehr übrig ist. Welcher Spieler hat eine Gewinnstrategie?

Lösung. Derjenige Spieler hat eine Gewinnstrategie, welcher den zweiten Zug macht. Nehmen wir also an, dass Pete beginnt, dann kann Basil den Sieg erzwingen.

Basils Strategie besteht zu Anfang des Spiels lediglich darin, irgendwelche beliebigen Streichhölzer zu entfernen. Dies tut er so lange, bis vor seinem Zug nur noch vier oder weniger vollständige 1×1-Quadrate übrig sind. Weil mit jedem Zug höchstens zwei 1×1-Quadrate zerstört werden können, muss noch mindestens ein Quadrat übrig sein, wenn diese Situation das erste Mal auftritt. Nun handelt Basil wie folgt:

Bei 1 **verbleibenden** 1×1**-Quadrat:** Er entfernt ein Streichholz dieses Quadrates und hat damit gewonnen.

Bei 2 **verbleibenden** 1×1**-Quadraten:** Falls die beiden Quadrate benachbart sind, entfernt Basil das Streichholz, welches sie sich teilen und hat damit gewonnen.

Falls sie nicht benachbart sind, haben sie zusammen genau 8 Streichhölzer. Da zu Beginn des Spiels 180 Streichhölzer vorhanden waren (jeweils 10 horizontale und vertikale Reihen von 9 Streichhölzern) und zu diesem Zeitpunkt ungerade viele Züge gemacht wurden, muss noch mindestens ein Streichholz vorhanden sein, welches zu keinem der beiden Quadrate gehört. Ein solches Streichholz entfernt Basil. Falls Pete danach ebenfalls ein Streichholz entfernt, das zu keinem 1×1-Quadrat gehört, liegt erneut der gleiche Fall vor und Basil verfährt wie zuvor. Ansonsten zerstört Pete ein Quadrat – und da sie nicht benachbart sind, auch nur genau eines. Damit landen wir im ersten Fall, in welchem wir bereits gesehen haben, dass Basil gewinnt.

Bei 3 **verbleibenden** 1×1**-Quadraten:** Die Quadrate können nicht paarweise benachbart sein, es gibt also unter den Quadraten zwei, die nicht benachbart sind. Das dritte Quadrat teilt mit jedem dieser beiden Quadrate höchstens ein Streichholz, hat also mindestens zwei Streichhölzer, die es mit keinem anderen Quadrat teilt. Eines dieser Streichhölzer entfernt Basil. Pete kann mit seinem Zug nun maximal ein Quadrat zerstören, vor dem nächsten Zug von Basil liegt also einer der beiden ersten Fälle vor.

Bei 4 **verbleibenden** 1×1**-Quadraten:** Jedes der Quadrate besitzt mindestens ein Streichholz, welches zu keinem anderen Quadrat gehört. Ein solches Streichholz entfernt Basil und hinterlässt Pete noch genau 3 vollständige 1×1-Quadrate. Nach Petes Zug liegt für Basil also einer der ersten drei Fälle vor und somit gewinnt er. □

Aufgabe M.5 (8 P.). In einem Dreieck $\triangle ABC$ schneiden sich die Seitenhalbierenden AA_0, BB_0 und CC_0 im Punkt M. P, Q, R und T seien die Umkreismittelpunkte der Dreiecke $\triangle MA_0B_0$, $\triangle MCB_0$, $\triangle MC_0A_0$ bzw. $\triangle MC_0B$. Beweise, dass sich P, Q, R, T und M auf einem gemeinsamen Kreis befinden.

Lösung. (Diese Lösung stammt im Wesentlichen aus den englischsprachigen Lösungen des Organisationskomitees in Russland.)

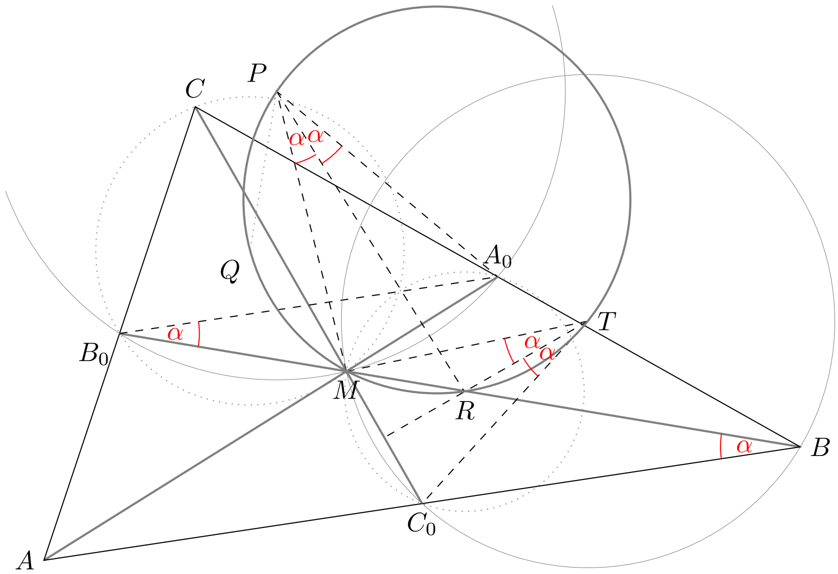


Abbildung 6: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.5.

Das Viereck $MB_0A_0C_0$ ist nicht konvex und somit kein Sehnenviereck, also unterscheiden sich P und R. Es wird nun bewiesen, dass T auch auf dem Umkreis von $\triangle MPR$ liegt. $\angle MPR = \frac{1}{2}\angle MPA_0$, da PR die Mittelsenkrechte von MA_0 ist. Nach Peripheriewinkelsatz auf dem Kreis um $\triangle MA_0B_0$ ist $MB_0A_0 = \frac{1}{2}MPA_0 = \angle MPR$. Fallen T und R zusammen, ist nichts zu zeigen, anderenfalls ist TR die Mittelsenkrechte von MC_0 und damit ist $\angle MTR = \frac{1}{2}MTC_0$. Nach Peripheriewinkelsatz auf dem Kreis um $\triangle MC_0B$ ist $MBC_0 = \frac{1}{2}MTC_0 = \angle MTR$. Da B_0A_0 und BC_0 nach Strahlensatz parallel sind, ist $\angle MB_0A_0 = \angle MBC_0$. Insgesamt ist $\angle MPR = \angle MTR$, also liegt T nach Peripheriewinkelsatz auf dem Umkreis von $\triangle MPR$. Analog liegt auch Q auf diesem Umkreis, P, Q, R und T liegen also auf einem Kreis. □

Aufgabe M.6. Einige verschiedene reelle Zahlen stehen auf einer Tafel. Peter möchte einen Term (einen Ausdruck) hinschreiben, dessen Ergebnisse genau diese Zahlen sind. Um den Term zu schreiben, darf er verwenden: beliebige reelle Zahlen, Klammern und die üblichen Rechenzeichen $+$, $-$ und $\cdot$ (Multiplikationspunkt). Außerdem darf er das spezielle Zeichen $\pm$ nutzen: Der Term wird mit $+$ und $-$ für jedes $\pm$ in jeder Kombination einmal ausgewertet. Der Term 5 ± 1 erzeugt zum Beispiel $\{4,6\}$ und $(2\pm0.5)\pm0.5$ erzeugt $\{1,2,3\}$. Kann Peter einen Term finden

(a) (3 P.) für genau die Zahlen 1, 2 und 4 an der Tafel bzw.

(b) (7 P.) für jede Auswahl von 100 verschiedenen reellen Zahlen an einer Tafel?

Lösung. Für jede beliebige Anzahl und Auswahl verschiedener reeller Zahlen kann Peter einen geeigneten Term finden. Wir geben für a dennoch eine explizite Lösung an, da sie in diesem Fall einfacher als die allgemeine Konstruktion ist.

(a) Der Term

$$(1.5 \pm 0.5) \cdot (1.5 \pm 0.5)$$

erzeugt wie gewünscht $\{1, 2, 4\}$.

(b) Steht an der Tafel nur eine Zahl, muss Peter nur diese Zahl hinschreiben. Falls es eine Auswahl von Zahlen gäbe, für die es keinen geeigneten Term gibt, dann gäbe es eine kleinste Zahl n, so dass Peter für gewisse vorgegebene Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ keinen Term finden kann. Wir haben bereits gesehen, dass n mindestens 2 ist.

Schreiben wir $b_i = a_i - a_n$ für jedes i von 1 bis $n-1$, dann kann Peter für die Zahlen $b_1, \ldots, b_{n-1}$ einen Term finden, da es weniger als n Zahlen sind. Weil die ursprünglichen Zahlen unterschiedlich waren, ist keines der b_i Null. Peter schreibt nun den Term für $b_1, \ldots, b_{n-1}$ an die Tafel, umgibt ihn mit Klammern und multipliziert ihn mit (0.5 ± 0.5). Dieser Term erzeugt 0 (wenn die letzte Klammer als $0.5 - 0.5$ ausgewertet wird) und $b_1, \ldots, b_{n-1}$ (wenn sie als $0.5 + 0.5$ ausgewertet wird). Addiert Peter noch a_n, dann erzeugt der Term genau die gewünschten Zahlen $a_1, \ldots, a_n$. Zu Übersicht: Ist T der Term, welcher $b_1, \ldots, b_{n-1}$ erzeugt, dann erzeugt

$$(T) \cdot (0.5 \pm 0.5) + a_n$$

$a_1, \ldots, a_n$. □

Aufgabe M.7 (10 P.)**.** Der Weihnachtsmann hat n Sorten Bonbons und k Bonbons von jeder Sorte. Er verteilt sie zufällig auf k Geschenkbeutel mit jeweils n Bonbons und gibt die Beutel an k Kinder. Die Kinder kucken sich den Inhalt ihrer Beutel an und beginnen zu tauschen: Zwei Kinder können jeweils einen Bonbon tauschen, wenn jedes dadurch einen Bonbon erhält, den es noch nicht hat. Kann die Reihenfolge der Tauschaktionen immer so angeordnet werden, dass am Ende jedes Kind Bonbons von jeder Sorte hat?

LÖSUNG. Die Kinder können stets derart tauschen, dass am Ende jedes Kind Bonbons jeder Sorte hat. Dazu gehen sie wie folgt vor. Unter den Kindern gibt es eines, das die wenigsten verschiedenen Sorten hat. Dieses Kind nennen wir A. (Unter Umständen haben andere Kinder die gleiche Zahl an Sorten; wichtig ist nur, dass kein Kind weniger Sorten als A hat.) Wenn nicht bereits alle Kinder von allen Sorten Bonbons haben, dann hat A von höchstens $n-1$ Sorten Bonbons. Andererseits hat A genau n Bonbons, es gibt also eine Sorte x, von der A mindestens zwei Bonbons hat.

Da es von der Sorte x genau k Bonbons gibt und A davon mindestens zwei hat, haben nicht alle k Kinder Bonbons der Sorte x. Sei B ein Kind, welches keine Bonbons der Sorte x hat. Nun hat B von mindestens ebenso vielen Sorten Bonbons wie A. Da A aber von Sorte x Bonbons hat und B nicht, muss es eine Sorte y geben, die B hat und A nicht. Von diesen beiden Sorten können A und B einen Bonbon tauschen. Danach hat A von einer Sorte mehr Bonbons: von allen Sorten, die es bereits vorher hatte, sowie nun auch von der Sorte y. Für B hat sich die Anzahl der Sorten zumindest nicht verringert, denn es hat Sorte x neu erhalten und schlimmstenfalls Sorte y verloren.

Wenn man also für jedes Kind die Sorten zählt, von der es Bonbons hat, dann können die Kinder immer einen Tausch so durchführen, dass die Summe dieser Zahlen steigt, bis schließlich jedes Kind von allen Sorten Bonbons hat. □

O Oberstufe

Aufgabe O.1 (3 P.)**.** 37 positive ganze Zahlen bilden eine geometrische Folge, also eine Folge, bei der das Verhältnis benachbarter Folgenglieder immer dasselbe ist. Das erste und letzte Folgenglied sind teilerfremd. Beweise, dass das 19te Folgenglied die 18te Potenz einer positiven ganzen Zahl ist.

LÖSUNG. Die Folgenglieder $a_1, \dots, a_{37}$ kann man mit dem gemeinsamen Verhältnis $q = \frac{a_2}{a_1}$ schreiben als $a_i = a_1 q^{i-1}$, insbesondere ist $\frac{a_{37}}{a_1} = q^{36}$. Den Bruch $q > 0$ kann man darstellen als $q = \frac{k}{n}$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen k und n. Es ist also $\frac{a_{37}}{a_1} = \frac{k^{36}}{n^{36}}$ und da a_{37} und a_1 teilerfremd sind, gilt auf Grund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung $a_{37} = k^{36}$ und $a_1 = n^{36}$.

Also ist $a_{19} = a_1 q^{18} = n^{36} \frac{k^{18}}{n^{18}} = (nk)^{18}$ die 18te Potenz der positiven ganzen Zahl nk. □

Aufgabe O.2 (6 P.)**.** Ein quadratisches 10×10-Gitter sei entlang 80 innerer Einheitssegmente in 20 Polygone gleicher Fläche zerteilt. Beweise, dass diese Polygone alle kongruent zueinander sind.

LÖSUNG. Da das Gitter insgesamt 100 Zellen hat, besteht jedes Polygon aus genau 5 Zellen. Die Anzahl der Einheitssegmente auf dem Rand eines Polygons nennen wir den *Umfang* des Polygons. Addiert man die Umfänge der 20 Polygone, hat man jedes der 80 Einheitssegmente, entlang derer zerteilt wurde, jeweils doppelt gezählt. Die 40 Einheitssegmente, die den Rand des Gitters bilden, hat man jeweils einmal gezählt. Andere Einheitssegmente wurden nicht gezählt, als Summe der Umfänge erhält man also $40 + 2 \cdot 80 = 200$.

Wir zeigen nun, dass es nur ein Polygon mit 5 Zellen und Umfang 10 gibt und dass alle anderen Polygone mit 5 Zellen einen größeren Umfang haben. Daraus folgt, dass alle Polygone Umfang 10 haben müssen (sonst wäre die Summe der 20 Umfänge größer als 200) und somit kongruent sind.

Sei P ein Polygon aus 5 Zellen und m, n die kleinsten Zahlen, so dass P in ein $m \times n$-Rechteck passt (mit Kanten entlang der Gitterlinien). Dann hat P mindestens Umfang $2m + 2n$, denn in jeder Spalte des Rechtecks besitzt P mindestens eine Zelle und somit mindestens zwei horizontale Einheitssegmente, ebenso wie für jede Zeile des Rechtecks mindestens zwei vertikale Einheitssegmente. Da $m + n$ mindestens 5 ist (alle $m \times n$-Rechtecke mit $m + n \leq 4$ haben höchstens 4 Zellen und können P daher nicht enthalten), hat P wie behauptet mindestens Umfang 10. Das einzige mögliche dazugehörige Rechteck ist ein 2×3-Rechteck (oder 3×2). Bis auf Kongruenz gibt es nur die beiden in Abbildung 7 angegebenen Möglichkeiten für P.

Das linke Polygon hat Umfang 10, das rechte jedoch Umfang 12. Also gibt es nur ein geeignetes Polygon und alle Polygone sind kongruent. □

Aufgabe O.3 (6 P.)**.** Jeder Koeffizient eines nicht-konstanten Polynoms ist eine ganze Zahl, deren Betrag höchstens 2015 ist. Beweise, dass jede positive Nullstelle des Polynoms größer als $\frac{1}{2016}$ ist.

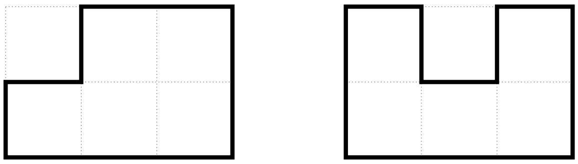


Abbildung 7: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.2.

Lösung. Sei $P(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$ ein solches Polynom. Durch Ausklammern von x^r und ggf. Multiplikation mit -1 können wir von $a_0 > 0$ ausgehen. Wir behaupten nun, dass

$$P(x) > 1 - 2016x \quad \text{für } x \in (0, 1/2016].$$

Daraus folgt sofort die Aussage der Aufgabe. Wir schätzen also ab und erhalten

$$P(x) \geq 1 + \sum_{k=1}^{N} a_k x^k \geq 1 - 2015 \sum_{k=1}^{N} x^k.$$

Wir erhalten nun die Behauptung durch einfache Umformungen:

$$\begin{aligned}
1 - 2015 \sum_{k=1}^{N} x^k &> 1 - 2016x && \Leftrightarrow \\
2016x(1-x) &> 2015 \sum_{k=1}^{N} x^k (1-x) = 2015(x - x^{N+1}) && \Leftrightarrow \\
2016(1-x) &> 2015(1 - x^N) && \Leftrightarrow \\
1 &> 2016x - 2015x^N.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist wahr, da $2016x \leq 1$. □

Aufgabe O.4 (7 P.)**.** Das Viereck $ABCD$ sei in einen Kreis einbeschrieben (also ein Sehnenviereck). Die Verlängerungen gegenüberliegender Seiten schneiden sich in den Punkten P und Q. Die Mittelpunkte der Diagonalen seien K und N. Beweise, dass $\angle PKQ + \angle PNQ = 180°$.

Lösung. Ohne Einschränkung sei P der Schnittpunkt von AB und CD, Q der von BC und DA, K der Mittelpunkt von AC sowie N der Mittelpunkt von BD (siehe Abbildung 8).

Die Dreiecke $\triangle ACP$ und $\triangle DBP$ sind ähnlich, da sie $\angle APC = \angle BPD$ gemeinsam haben und auch $\angle PCA = \angle DCA$ und $\angle DBP = \angle DBA$ gleich sind nach dem Peripheriewinkelsatz über der Sehne AD. Also sind auch die Dreiecke $\triangle AKP$ und $\triangle DNP$ ähnlich und deshalb gilt $\angle PKA = \angle DNP$. Analog folgt $\angle AKQ = \angle QNB$. Also gilt

$$\begin{aligned}
\angle PKQ + \angle PNQ &= \angle PKA + \angle AKQ + \angle PNQ \\
&= \angle DNP + \angle QNB + \angle PNQ = \angle DNB = 180°.
\end{aligned}$$ □

Aufgabe O.5. Einige verschiedene reelle Zahlen stehen auf einer Tafel. Peter möchte einen Term (einen Ausdruck) hinschreiben, dessen Ergebnisse genau diese Zahlen sind. Um den Term zu schreiben, darf er verwenden: beliebige reelle

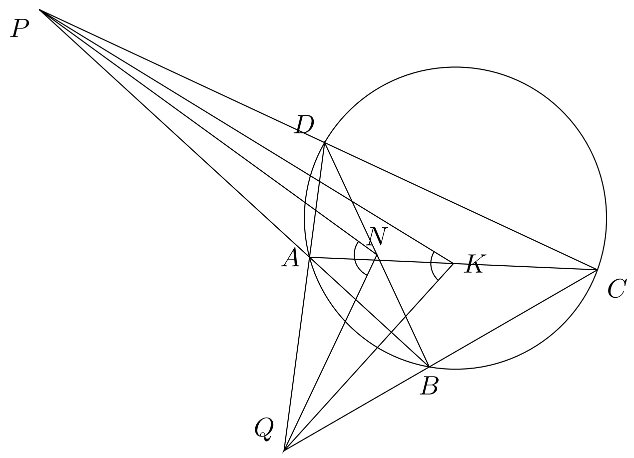


Abbildung 8: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.4.

Zahlen, Klammern und die üblichen Rechenzeichen $+$, $-$ und $\cdot$ (Multiplikationspunkt). Außerdem darf er das spezielle Zeichen $\pm$ nutzen: Der Term wird mit $+$ und $-$ für jedes $\pm$ in jeder Kombination einmal ausgewertet. Der Term 5 ± 1 erzeugt zum Beispiel $\{4, 6\}$ und $(2 \pm 0.5) \pm 0.5$ erzeugt $\{1, 2, 3\}$. Kann Peter einen Term finden

(a) (2 P.) für genau die Zahlen 1, 2 und 4 an der Tafel bzw.

(b) (6 P.) für jede Auswahl von 100 verschiedenen reellen Zahlen an einer Tafel?

Lösung. Siehe Lösung von Aufgabe M.6. □

Aufgabe O.6. Basil hat eine kugelförmige Wassermelone mit 20 cm Durchmesser. Mit einem langen Messer macht Basil drei Einschnitte, die jeweils (paarweise) senkrecht zueinander verlaufen. Jeder Einschnitt hat die Tiefe h, die Schnittfläche ist also ein Kreisausschnitt der Höhe h. Muss die Wassermelone in jedem Fall in mindestens zwei Stücke zerlegt worden sein, wenn

(a) (6 P.) $h = 17$ cm bzw.

(b) (6 P.) $h = 18$ cm ist?

Lösung. Hier wird gezeigt, dass die Wassermelone sogar für $h = 18$ nicht unbedingt in zwei Stücke zerlegt worden sein muss. Dies gilt dann natürlich auch für $h = 17$. Für $h = 17$ gibt es auch noch einfachere Möglichkeiten zu schneiden.

Die Einheit „cm“ wird im Folgenden weggelassen, alle berechneten Längen liegen in der Ebene die parallel zum Betrachter auf halbem Weg in die Melone liegt, dies sei die *Mittelebene*.

Man schneidet zunächst von vorne senkrecht in die Melone. Der Schnitt soll vertikal verlaufen und so weit wie möglich links liegen, so dass die Melone noch nicht zerfällt (die vertikale Linie in Abbildung 9 minimal nach rechts verschoben). Es wird nun der Abstand einer solchen Schnittebene vom Mittelpunkt berechnet. Angenommen der Schnitt zerteilt die Melone und hat die Tiefe 18, dann ist die Schnittebene ein Kreis mit Durchmesser 18. Schneidet man also

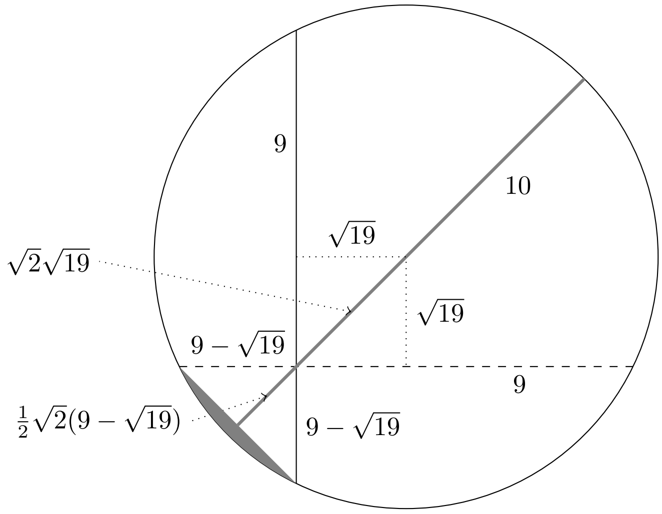


Abbildung 9: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.6, Melone von vorne.

minimal rechts neben der vertikalen Linie, die in der Mittelebene Länge 18 hat, so zerteilt der Schnitt die Melone gerade eben nicht. Die Hälfte dieser Linie hat Länge 9 und ist eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, in dem die andere Kathete der Abstand zum Mittelpunkt ist und die Hypotenuse ein Radius der Melone mit Länge 10. Also ist der Abstand zum Mittelpunkt $\sqrt{10^2-9^2}=\sqrt{19}$ (vergleiche Abbildung 9).

Als nächstes schneidet man von hinten senkrecht in die Melone. Der Schnitt soll horizontal verlaufen und so weit wie möglich unten liegen (die gestrichelte horizontale Linie in Abbildung 9 minimal nach oben verschoben). Dies ist analog zum ersten Schnitt der Fall, wenn der Abstand zum Mittelpunkt minimal kleiner als $\sqrt{19}$ ist. Die Melone zerfällt dabei nicht, da der linke und rechte Teil hinter dem ersten Schnitts verbunden sind und der obere und untere Teil vor dem zweiten Schnitt.

Der dritte Schnitt soll innerhalb der Mittelebene verlaufen: diagonal von rechts oben beginnend mit der Tiefe 18 (innerhalb des weißen Anteils des Kreises in Abbildung 9, die graue Diagonale ist die Mitte der Schnittebene). Solange dabei die beiden *kritischen Punkte*, das sind der am weitesten unten liegende Punkt des ersten Schnitts und der am weitesten links liegende Punkt des zweiten Schnitts, nicht getroffen werden, zerfällt die Melone dabei nicht: Die vorderen Teile sind zwar durch den ersten Schnitt geteilt, eine Verbindung existiert aber hinter der ersten Schnittebene ganz unten am Schnitt. Genauso existiert eine Verbindung der hinteren Teile vor der zweiten Schnittebene ganz links. Es bleibt nachzuweisen, dass ein Schnitt der Tiefe 18 wirklich die beiden kritischen Punkte nicht erreicht. Dies ist der Fall, wenn die Diagonale von oben rechts bis zur Verbindungsstrecke der kritischen Punkte Länger als 18 ist (die graue Diagonale in Abbildung 9). Diese Diagonale setzt sich aus den folgenden drei Abschnitten zusammen: Von oben rechts zum Mittelpunkt der Melone verläuft ein Radius der Länge 10. Vom Mittelpunkt der Melone zum Schnittpunkt der drei Schnittebenen verläuft eine Diagonale in einem Quadrat mit Seitenlänge $\sqrt{19}$, nämlich jeweils dem Abstand der ersten beiden Schnittebenen zum Mittelpunkt, dieser

Abschnitt hat also die Länge $\sqrt{2}\sqrt{19}$. Der dritte Abschnitt verläuft vom Schnittpunkt der Schnittebenen zur Verbindung der kritischen Punkte. Es handelt sich um die halbe Diagonale in einem Quadrat mit Seitenlängen $9 - \sqrt{19}$, das ist die Hälfte der Schnitthöhe bzw. -breite abzüglich der eben bestimmten $\sqrt{19}$. Der dritte Abschnitt hat also Länge $\frac{1}{2}\sqrt{2}(9 - \sqrt{19})$. Insgesamt hat die Diagonale also die Länge

$$10 + \sqrt{2}\sqrt{19} + \frac{1}{2}\sqrt{2}(9 - \sqrt{19}) = 10 + \frac{1}{\sqrt{2}}(9 + \sqrt{19}).$$

Für diese Länge gilt tatsächlich

$$10 + \frac{1}{\sqrt{2}}(9 + \sqrt{19}) > 10 + \frac{1}{3/2}(9 + \sqrt{16}) = 10 + \frac{26}{3} > 18. \qquad \square$$

Bemerkung. Ist im gerade beschriebenen Verfahren die Schnitttiefe x und setzt man für die Diagonale ebenfalls die dann maximale Länge x an, erhält man die Gleichung

$$10 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2} + \sqrt{100 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\right) = x,$$

welche die Lösung

$$x = \frac{10}{17}\left(16 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{26 + 7\sqrt{2}}\right) = 18{,}956\ldots$$

hat, mit dem Verfahren kann man eine Schnitttiefe von 19 cm also nicht mehr erreichen, aber einen halben mm weniger doch.

Aufgabe O.7 (12 P.)**.** N Kinder, die alle (paarweise) verschieden groß sind, stehen in einer Reihe (irgendwie angeordnet). Die folgende zweischrittige Prozedur wird wiederholt angewendet: Als Erstes wird die Reihe in so wenige Gruppen wie möglich geteilt, so dass innerhalb einer Gruppe alle Kinder von links nach rechts aufsteigend der Größe nach sortiert sind (dabei können Gruppen auch nur aus einem Kind bestehen). Als Zweites wird die Reihenfolge der Kinder innerhalb ihrer Gruppe genau umgedreht (die Kinder stehen also absteigend der Größe nach sortiert). Beweise, dass nach $N-1$ solchen Umordnungen die Kinder in absteigender Reihenfolge von links nach rechts angeordnet sind.

Lösung. (Diese Lösung stammt im Wesentlichen aus den englischsprachigen Lösungen des Organisationskomitees in Russland.)

Zu einer beliebigen Größe h werden alle Kinder *Kleine* genannt, die kleiner sind als h, und alle anderen *Große*. Wenn der linke von zwei Nachbarn ein Kleiner ist und der rechte ein Großer, wird die Platz zwischen ihnen *Trennung* genannt. Das *Gewicht* einer Trennung sei die Anzahl der Kleinen irgendwo links davon plus die Anzahl der Großen irgendwo rechts davon. Mögliche Werte der Gewichte sind von 2 bis N. Jede Trennung ist innerhalb einer Gruppe, aber nicht mehr als eine in einer Gruppe. Nach der Prozedur liegen alle Trennungen auf den Grenzen der Gruppen, die die Trennungen enthalten haben, und deren Gewichte sind kleiner als die Gewichte der Trennungen in den jeweiligen Gruppen. Also reduziert sich das Maximum der Gewichte durch jede Anwendung der Prozedur (solange Trennungen existieren). Somit gibt es nach $N-1$ Prozeduren keine Trennungen mehr und alle Großen stehen links von den Kleinen. Wenn jetzt ein Kind größer wäre als sein linker Nachbar, wählt man h zwischen den Größen der beiden und erhält einen Widerspruch. Also nimmt die Größe nun von links nach rechts ab. $\square$

Fragen und Anmerkungen. Schicken Sie diese bitte an *Städtewettbewerb Mathematik Hamburg* <stw.m.hh@gmail.com>. An den Lösungen haben mitgewirkt: Benedikt Diederichs, Christian Elbracht, Christian Reiher, Mara Sommerfeld, Philipp Sprüssel und Jan Henrik Sylvester.