# Städtewettbewerb Frühjahr 2016
# Lösungsvorschläge

Hamburg

29. Februar 2016 [Version 17. März 2016]

## M Mittelstufe

**Aufgabe M.1** (3 P.)**.** Zwanzig Kinder stehen im Kreis (sowohl Jungen als auch Mädchen sind anwesend). Von jedem Jungen hat sein(e) Nachbar(in) im Uhrzeigersinn ein blaues T-Shirt an und von jedem Mädchen hat ihr(e) Nachbar(in) gegen den Uhrzeigersinn ein rotes T-Shirt an. Ist es möglich, die genaue Anzahl an Jungen im Kreis zu ermitteln?

Lösung. Ja, es müssen genau zehn Jungen im Kreis stehen. Steht ein Junge an einer Position, kann an der übernächsten im Uhrzeigersinn kein Mädchen stehen, da dadurch widersprüchliche Anforderungen an die Farbe des T-Shirts des Kinds dazwischen gestellt werden. Ausgehend von einem Jungen, den es laut Aufgabenstellung geben muss, steht also an jedem zweiten Platz wieder ein Junge. Dies sind zehn Jungen. Stände an einem Platz dazwischen ein weiterer Junge, so müssten Jungen an allen Plätzen stehen, was die Aufgabenstellung verbietet. Also stehen an allen anderen Plätze Mädchen. □

**Aufgabe M.2** (4 P.)**.** Im spitzwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ sei $\angle ACB = 60°$ und $H$ sei der Schnittpunkt seiner Höhen. Der Kreis um $H$ mit Radius $|HC|$ treffe die Geraden $CA$ und $CB$ jeweils zum zweiten Mal in $M$ bzw. $N$. Beweise, dass $AN$ und $BM$ parallel sind oder zusammenfallen.

Lösung. Da $|CH| = |MH|$ ist, ist $\triangle MHC$ gleichschenklig und die Höhe durch $H$ stimmt mit der Mittelsenkrechten von $CM$ überein (siehe auch Abbildung 1). Die Mittelsenkrechte von $CM$ ist also die Gerade $BH$, auf welcher die Höhe des Dreiecks $\triangle ABC$ und dann auch $\triangle MBC$ jeweils durch $B$ ist. Also ist das Dreieck $\triangle MBC$ gleichschenklig und, da es einen 60°-Winkel bei $C$ hat, auch gleichseitig. Analog ist wegen $|CH| = |MH|$ die Verlängerung von $AH$ gleichzeitig Höhe und Mittelsenkrechte in $\triangle ANC$, das Dreieck ist gleichschenklig und gleichseitig, da es einen 60°-Winkel bei $C$ hat. Wegen $\angle BMC = 60° = \angle NAC$ sind $AN$ und $BM$ Parallelen. □

**Aufgabe M.3** (5 P.)**.** Ist es möglich, dass sowohl die Summe als auch das Produkt von 2016 ganzen Zahlen jeweils gleich 2016 sind? (Die Zahlen müssen nicht notwendigerweise verschieden sein.)

Lösung. Ja, für die 2016 ganzen Zahlen 2, 1008, 1510mal 1 und 504mal $-1$ gilt

$$2 \cdot 1008 \underbrace{\cdot 1 \ldots \cdot 1}_{1510\text{mal}} \underbrace{\cdot (-1) \ldots \cdot (-1)}_{504\text{mal}} = 2016 = 2 + 1008 \underbrace{+1 \ldots + 1}_{1510\text{mal}} \underbrace{+(-1) \ldots + (-1)}_{504\text{mal}}$$

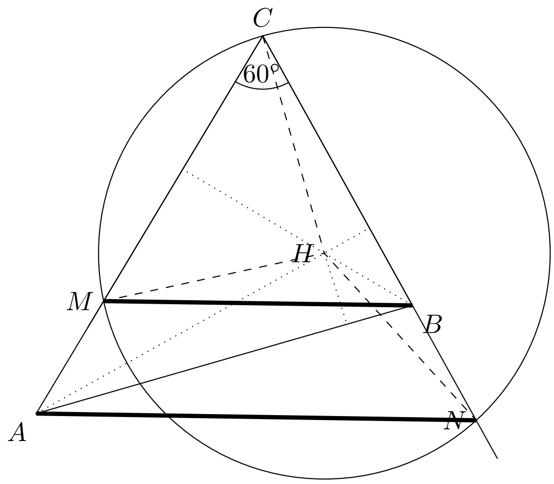


Abbildung 1: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.2.

Bemerkung: Es gibt viele weitere Lösungen, zum Beispiel 16, $-9$, 7, $-2$, 2008mal 1 und viermal -1. □

**Aufgabe M.4** (5 P.)**.** In einem $10 \times 10$-Quadrat sind die Zellen des $5 \times 5$-Quadrats oben-links schwarz und alle restlichen weiß. Welches ist das maximale $n$, so dass das ursprüngliche Quadrat (entlang der Ränder der Zellen) in $n$ Polygone zerlegt werden kann, in denen jeweils die Anzahl an weißen Zellen dreimal so groß ist wie die Anzahl an schwarzen Zellen? (Die Polygone müssen nicht notwendig kongruent oder auch nur flächengleich sein.)

Lösung. Das maximale $n$ ist 9, da jedes Polygon mit schwarzen und weißen Zellen eine schwarze Zelle mit weißem Nachbarn enthalten muss, von denen es nur 9 gibt. Eine Zerlegung in 9 Polygone ist in Abbildung 2 gezeigt. □

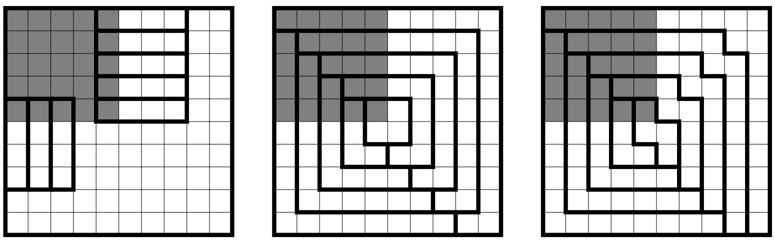

Abbildung 2: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.4 (Varianten).

**Aufgabe M.5** (5 P.)**.** In ein blaues Dreieck seien eine Seitenhalbierende, eine Winkelhalbierende und eine Höhe in rot eingezeichnet (nicht notwendigerweise von drei verschiedenen Ecken). Dadurch zerfällt das Dreieck in mehrere Teile. Ist es möglich, dass eins dieser Teile ein gleichseitiges Dreieck mit roten Seiten ist?

Lösung. Es ist möglich, dass zwischen einer Seitenhalbierenden, einer Winkelhalbierenden und einer Höhe innerhalb des Dreiecks ein gleichseitiges Dreieck entsteht. Sei dazu $\triangle FBC$ ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei $F$ und $\angle CBF = 60°$ (siehe Abbildung 3). Weiter liege $S$ auf der Geraden $FB$ mit $\angle SCB = 90°$ und $A$ sei $B$ an $S$ gespiegelt. Also liegen $A$, $S$, $F$ und $B$ auf einer Geraden. Im Dreieck $\triangle ABC$ ist $CF$ eine Höhe und $CS$ eine Seitenhalbierende. Es sei $W$ der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle CBA$ mit $AC$, so dass $BW$ eine Winkelhalbierende ist.

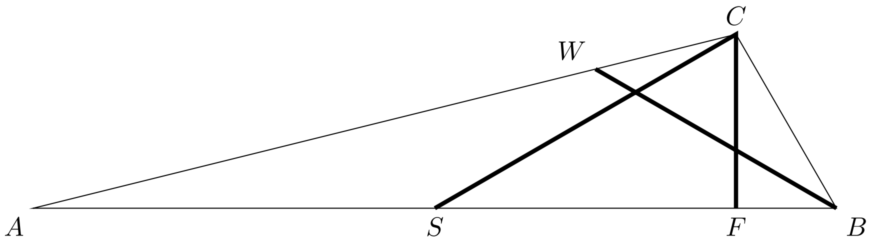


Abbildung 3: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.5.

Es ist $\angle SCF = \angle SCB - \angle FCB = 90° - 30° = 60°$. Da $\angle WBF = \frac{1}{2}\angle CBF = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$ und $\angle BFC = 90°$ ist, schneiden sich $CF$ und $WB$ ebenfalls im Winkel von $60°$, so dass die Geraden $CF$, $WB$ und $CS$ ein gleichseitiges Dreieck bilden, da deren Schnittpunkte nicht alle zusammenfallen. $WB$ schneidet $CS$ und $CF$ nämlich nicht in deren Schnittpunkt $C$, da $W$ zwischen $A$ und $C$ liegt. $\square$

# O Oberstufe

**Aufgabe O.1** (4 P.)**.** Ein Punkt innerhalb eines konvexen Vierecks sei mit allen Eckpunkten verbunden und zusätzlich mit jeweils einem weiteren Punkt auf jeder der vier Seiten. Hierdurch zerfällt das Viereck in acht Dreiecke. Beweise, dass das Viereck ein Sehnenviereck ist, falls alle acht Dreiecke den gleichen Umkreisradius haben.

Lösung. Das konvexe Viereck sei $ABCD$, der Punkt im Inneren sei $M$ und $A'$ sei der weitere Punkt auf $AB$. Die Umkreisradien der acht Dreiecke seien gleich.

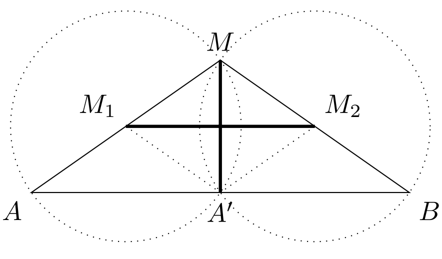


Abbildung 4: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.1.

Die Umkreismittelpunkte $M_1$ von $\triangle AA'M$ und $M_2$ von $\triangle BA'M$ sind verschieden (siehe auch Abbildung 4) und liegen beide auf der Mittelsenkrechten von $A'M$ im selben Abstand zu dieser, da die Umkreisradien $A'M_1$ und $A'M_2$

gleich lang sind und die Dreiecke bestehend aus $M_1$ bzw. $M_2$, $A'$ und dem Mittelpunkt von $A'M$ damit kongruent sein müssen. Also liegen $M_1$ und $M_2$ auf verschiedenen Seiten von $A'M$ und die Umkreise von $\triangle AA'M$ und $\triangle BA'M$ gehen durch Spiegelung an $A'M$ ineinander über. Die Winkel $\angle A'AM$ und $\angle MBA'$ liegen also, wenn man einen an $A'M$ spiegelt, auf demselben Kreis über der Sehne $A'M$ und sind damit gleich groß. Somit ist $\triangle ABM$ gleichschenklig und es gilt $|AM| = |BM|$. Analog folgert man $|BM| = |CM|$ und $|CM| = |DM|$, so dass $A$, $B$, $C$ und $D$ auf einem Kreis mit Mittelpunkt $M$ liegen. Das Viereck $ABCD$ ist ein Sehnenviereck. □

**Aufgabe O.2** (4 P.)**.** Ist es möglich, dass sowohl die Summe als auch das Produkt von 2016 ganzen Zahlen jeweils gleich 2016 sind? (Die Zahlen müssen nicht notwendigerweise verschieden sein.)

Lösung. Siehe Lösung von Aufgabe M.3. □

**Aufgabe O.3** (4 P.)**.** In einem $10 \times 10$-Quadrat sind die Zellen des $5 \times 5$-Quadrats oben-links schwarz und alle restlichen weiß. Welches ist das maximale $n$, so dass das ursprüngliche Quadrat (entlang der Ränder der Zellen) in $n$ Polygone zerlegt werden kann, in denen jeweils die Anzahl an weißen Zellen dreimal so groß ist wie die Anzahl an schwarzen Zellen? (Die Polygone müssen nicht notwendig kongruent oder auch nur flächengleich sein.)

Lösung. Siehe Lösung von Aufgabe M.4. □

**Aufgabe O.4** (6 P.)**.** Eine Firma hat je einen festen Betrag in Rubel für 100 Artikel im Budget. Jede dieser 100 Zahlen hat höchstens zwei Nachkommastellen. Jeder Buchhalter wählt in seiner Kopie der Liste zwei dieser Zahlen aus, addiert sie, streicht die Nachkommastellen und schreibt das Ergebnis statt der beiden Zahlen auf seine Liste, die damit aus 99 Zahlen besteht. So fährt er fort, bis seine Liste nur noch aus einer ganzen Zahl besteht. Das Ergebnis ist für alle Buchhalter (paarweise) verschieden. Was ist die maximal mögliche Anzahl an Buchhaltern?

Lösung. Die maximal mögliche Anzahl an Buchhaltern ist 51.

Da die ganzzahligen Anteile der Zahlen in jedem Fall addiert werden, ist nur entscheidend, wie häufig beim Addieren die Nachkommaanteile zusammen größer oder gleich 1 waren, also ein Übertrag in den ganzzahligen Anteil stattgefunden hat. Dies kann nur passieren, wenn ein Paar ursprünglicher Zahlen addiert wird, da bei Summen ja keine Nachkommastellen mehr existieren. Also kann es höchstens 50mal passieren. Dadurch ergeben sich höchstens 51 verschiedene Endergebnisse.

Es kann auch tatsächlich 51 verschiedene Endergebnisse geben, zum Beispiel, wenn die Zahlen 0,10 und 0,90 jeweils 50mal auftreten. Will man eine bestimmte Anzahl Überträge zwischen 1 und 50 erhalten, addiert man so häufig jeweils ein Paar aus 0,10 und 0,90 und addiert danach alle restlichen Zahlen zu einer bestehenden Summe. Will man 0 Übertrage erhalten, beginnt man mit einem Paar aus 0,10 und 0,10 und fährt dann genauso fort. □

**Aufgabe O.5.** Die Mittelpunkte der 12 Kanten eines Würfels seien markiert. Enthält die Oberfläche einer Kugel in jedem Fall alle diese Punkte, wenn die Oberfläche

(a) (3 P.) mindestens 6 der markierten Punkte enthält bzw.

(b) (3 P.) mindestens 7 der markierten Punkte enthält?

LÖSUNG. Im Dreidimensionalen gibt es zu vier Punkten, die nicht in einer Ebene liegen, jeweils genau eine Kugel, deren Oberfläche die vier Punkte enthält: Jeweils drei der Punkte liegen nicht auf einer Geraden, da sonst alle vier in einer Ebene lägen. Der Mittelpunkt einer Kugel, die drei bestimmte Punkte enthält, muss also auf der Senkrechten durch den Umkreismittelpunkt des Dreiecks aus den drei Punkten liegen. Wählt man zwei verschiedene Tripel aus vier Punkten aus, erhält man also zwei nicht-parallele Senkrechte, die höchstens einen Schnittpunkt haben können. Es gibt also höchstens einen möglichen Kugelmittelpunkt. Die beiden Senkrechten schneiden sich auch immer und damit gibt es immer eine Kugel, auf deren Oberfläche die vier Punkte liegen, da sie beide in der Ebene liegen, die die gemeinsame Seite der beiden Dreiecke senkrecht in der Mitte schneidet.

(a) Wenn sie mindestens sechs der Kantenmittelpunkte enthält, muss die Oberfläche einer Kugel nicht unbedingt alle Kantenmittelpunkte enthalten. Um das einzusehen, findet man sechs der Kantenmittelpunkte des Würfels, die in einer Ebene liegen: Man wähle zwei diametral gegenüberliegende Ecken aus und betrachte alle Kanten, die keinen der beiden gewählten Punkte enthalten. Die Mittelpunkte dieser sechs Kanten haben denselben Abstand $\frac{\sqrt{5}}{2}$ der Kantenlänge zu jeder der ausgewählten Ecken, liegen also auf der Oberfläche einer Kugel mit einem der gewählten Würfelecken als Mittelpunkt, die selbst natürlich nicht auf der Kugeloberfläche liegt. (Bemerkung: „Stellt“ man den Würfel auf eine der gewählten Ecken, liegen die genannten Kantenmittelpunkte in der Ebene parallel zur Standfläche auf halber Höhe, also die Ebene, die die Verbindungsstrecke der gewählten Punkte in der Mitte senkrecht schneidet.)

(b) Wenn die Oberfläche einer Kugel mindestens sieben der Kantenmittelpunkte enthält, enthält sie in jedem Fall auch die restlichen. Es wird nämlich gezeigt, dass sieben Kantenmittelpunkte niemals in einer Ebene liegen und es somit nach der Vorüberlegung nur eine Kugel gibt, auf deren Oberfläche alle sieben Kantenmittelpunkte liegen, und diese Kugel ist die, auf deren Oberfläche alle Kantenmittelpunkte liegen (mit Mittelpunkt in der Mitte des Würfels). Betrachtet man die Ebenen durch zwei Kantenmittelpunkte, die auf einer Würfelfläche und dort gegenüber liegen. Diese Ebenen enthalten maximal zwei weitere Kantenmittelpunkte, also können in einer Ebene mit mehr als vier Kantenmittelpunkten keine zwei solche liegen. Zu jedem Kantenmittelpunkt gibt es also zwei, die nicht in einer solchen Ebene liegen sollen, und jeder davon zählt auch nur für zwei Kantenmittelpunkte. Also können maximal die Hälfte der Kantenmittelpunkte und einer Ebene liegen und nicht sieben. □

**Fragen und Anmerkungen.** Schicken Sie diese bitte an *Städtewettbewerb Mathematik Hamburg* <stw.m.hh@gmail.com>. An den Lösungen haben mitgewirkt: Mara Sommerfeld, Philipp Sprüssel und Jan Henrik Sylvester.