

M Mittelstufe

Aufgabe 1 (3 P.). Eine Folge positiver ganzer Zahlen habe die Gesamtsumme 20 und außerdem sei keine Zahl 3 und die Summe mehrerer aufeinanderfolgender Zahlen sei auch nie 3. Ist es möglich, dass eine solche Folge mehr als 10 Zahlen hat?

Aufgabe 2 (4 P.). $2n+1$ Münzen liegen im Kreis angeordnet. Am Anfang seien bei allen Münzen die Köpfe oben. Entlang des Uhrzeigersinns werden folgende $2n + 1$ Wendungen von Münzen durchgeführt: Eine Münze wird gewendet, die nächste ausgelassen, die nächste gewendet, die nächsten beiden ausgelassen, die nächste gewendet, die nächsten drei ausgelassen, die nächste gewendet usw. bis $2n$ Münzen ausgelassen werden und die nächste gewendet wird. Beweise, dass am Ende dieser Prozedur genau eine Münze mit dem Kopf nach unten liegt.

Aufgabe 3 (4 P.). Das Produkt der beiden positiven ganzen Zahlen m und n sei durch deren Summe teilbar. Beweise, dass dann $m + n \leq n^2$ gilt.

Aufgabe 4 (5 P.). Gleichschenklige Dreiecke mit festem Winkel α an der Ecke gegenüber von der Basis seien in das Rechteck $ABCD$ einbeschrieben, so dass jeweils die genannte Ecke auf der Seite BC liegt und die Ecken der Basis jeweils auf den Seiten AB und CD liegen. Beweise, dass die Mittelpunkte der Basen all solcher Dreiecke zusammenfallen müssen.

Aufgabe 5 (5 P.). Ein Magier und sein Assistent führen folgenden Trick durch. 12 leere Schachteln stehen in einer Reihe. Der Magier verlässt den Raum und eine Person des Publikums versteckt je eine Münze in zwei selbst gewählten Schachteln, so dass der Assistent weiß, in welchen Schachteln Münzen sind. Der Magier kommt zurück und der Assistent darf eine Schachtel öffnen, die keine Münze enthält. Danach wählt der Magier vier Schachteln aus, die gleichzeitig geöffnet werden. Sein Ziel ist es, dabei beide Schachteln mit Münzen zu öffnen. Entwickle eine Methode, die es dem Magier und seinem Assistenten ermöglicht, den Trick immer erfolgreich durchzuführen.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden.

Viel Erfolg!

O Oberstufe

Aufgabe 1 (4 P.). Die Abstände eines bestimmten Punktes im Inneren eines regelmäßigen Sechsecks zu drei nebeneinander liegenden Eckpunkten seien 1, 1 und 2 (in dieser Reihenfolge). Ermittle die Seitenlänge des Sechsecks.

Aufgabe 2 (4 P.). a und b seien positive ganze Zahlen, so dass $a^{n+1} + b^{n+1}$ durch $a^n + b^n$ teilbar ist für unendliche viele verschiedene positive ganze Zahlen n . Ist es notwendig, dass $a = b$ gelten muss?

Aufgabe 3 (4 P.). Beweise, dass jedes Dreieck in 2019 Vierecke zerteilt werden kann, so dass jedes Viereck sowohl ein Sehnenviereck als auch ein Tangentenviereck ist. (Sehnenvierecke sind solche mit Umkreis, Tangentenvierecke solche mit Inkreis.)

Aufgabe 4 (5 P.). Ein Magier und sein Assistent führen folgenden Trick durch. 13 leere Schachteln stehen in einer Reihe. Der Magier verlässt den Raum und eine Person des Publikums versteckt je eine Münze in zwei selbst gewählten Schachteln, so dass der Assistent weiß, in welchen Schachteln Münzen sind. Der Magier kommt zurück und der Assistent darf eine Schachtel öffnen, die keine Münze enthält. Danach wählt der Magier vier Schachteln aus, die gleichzeitig geöffnet werden. Sein Ziel ist es, dabei beide Schachteln mit Münzen zu öffnen. Entwickle eine Methode, die es dem Magier und seinem Assistenten ermöglicht, den Trick immer erfolgreich durchzuführen.

Aufgabe 5 (5 P.). Eine Folge positiver ganzer Zahlen habe die Gesamtsumme 2019 und außerdem sei keine Zahl 40 und die Summe mehrerer aufeinanderfolgender Zahlen sei auch nie 40. Aus wie vielen Zahlen kann eine solche Folge höchstens bestehen?

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden.

Viel Erfolg!