M Mittelstufe

Aufgabe 1. Die Anzahl der Faktoren einer Primfaktorzerlegung einer ganzen Zahl $n > 1$ heiße *Komplexität von n*. Zum Beispiel ist die Komplexität von 4 und 6 jeweils 2. Finde alle Zahlen n, für die alle Zahlen zwischen n und $2n$ eine Komplexität haben

(a) (2 P.) nicht größer als die Komplexität von n,

(b) (2 P.) kleiner als die Komplexität von n.

Aufgabe 2 (7 P.)**.** Zwei spitzwinklige Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A_1B_1C_1$ seinen so, dass B_1 und C_1 auf BC liegen und A_1 innerhalb des Dreiecks $\triangle ABC$ liegt. Seien S und S_1 die Flächeninhalte dieser beiden Dreiecke. Beweise:

$$\frac{S}{AB + AC} > \frac{S_1}{A_1B_1 + A_1C_1}$$

Aufgabe 3 (7 P.)**.** Man habe 100 optisch ununterscheidbare Münzen von drei Typen: Gold, Silber und Kupfer. Darunter sei mindestens eine Münze jeden Typs. Jede Goldmünze wiege 3 Gramm, jede Silbermünze 2 Gramm und jede Kupfermünze 1 Gramm. Wie ermittelt man sicher den Typ jeder einzelnen Münze mit insgesamt nicht mehr als 101 Wägungen unter Benutzung einer Balkenwaage ohne Gewichte?

Aufgabe 4 (7 P.)**.** Seien OP und OQ die Senkrechten vom Umkreismittelpunkt O eines Dreiecks $\triangle ABC$ zu den inneren und äußeren Winkelhalbierenden des Winkels bei B. Beweise, dass die Gerade PQ die Strecke, die die Mittelpunkte von CB und AB verbindet, halbiert.

Aufgabe 5 (8 P.)**.** Wir nennen das Paar (m, n) von zwei verschiedenen positiven ganzen Zahlen *nett*, wenn mn und $(m+1)(n+1)$ Quadratzahlen sind. Beweise, dass es zu jeder positiven ganzen Zahl m mindestens ein $n > m$ gibt, so dass das Paar (m, n) nett ist.

Aufgabe 6 (8 P.)**.** Peter habe etliche 100 Rubel-Scheine und kein anderes Geld. Er fängt an Bücher zu kaufen; jedes Buch koste eine positive ganze Zahl an Rubeln und er bekommt Wechselgeld in 1 Rubel-Stücken. Jedes Mal, wenn Peter ein teures Buch für 100 Rubel oder mehr kauft, benutzt er ausschließlich 100 Rubel-Scheine und zwar nur so viele wie nötig. Jedes Mal, wenn er ein günstiges Buch (für weniger als 100 Rubel) kauft, benutzt er Münzen, sofern er ausreichend viele hat, oder einen 100 Rubel-Schein. Sobald die 100 Rubel-Scheine aufgebraucht sind, hat Peter genau die Hälfte seines Geldes ausgegeben. Ist es möglich, dass er mehr als 5000 Rubel ausgegeben hat?

Aufgabe 7 (10 P.)**.** Peter hat einen quadratischen Holzstempel, der in ein Gitter aufgeteilt ist. Peter tränkt 102 Zellen dieses Gitter mit schwarzer Tinte. Danach drückt er diesen Stempel 100-mal auf ein Papier, so dass jeweils nur die schwarzen 102 Zellen einen schwarzen Abdruck auf dem Papier hinterlassen. Ist es möglich, dass nach diesem Vorgehen der Abdruck auf dem Papier ein 101×101-Quadrat ist, bei dem alle Zellen außer einer Eckzelle schwarz sind?

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden. Viel Erfolg!