O Oberstufe

Aufgabe 1 (5 P.)**.** Das Polynom $P(x, y)$ sei so, dass für jede ganze Zahl $n \geq 0$ jedes der Polynome $P(n, y)$ und $P(x, n)$ entweder konstant 0 ist oder einen Grad nicht größer als n hat. Ist es möglich, dass das Polynom $P(x, x)$ einen ungeraden Grad hat?

Aufgabe 2 (5 P.)**.** Das Dreieck $\triangle ABC$ sei spitzwinklig. Die Punkte A', B' und C' liegen auf den Seiten BC, AC bzw. AB und die Strecke AA', BB' und CC' schneiden sich im gemeinsamen Punkt P innerhalb des Dreiecks. Zu jeder dieser Strecken betrachten wir den Kreis, dessen Durchmesser die Strecke ist, und die Sehne des jeweiligen Kreises, die Teil der Senkrechten durch P zum jeweiligen Durchmesser ist. Diese drei Sehnen haben dieselbe Länge. Beweise, dass P dann der Höhenschnittpunkt sein muss.

Aufgabe 3 (6 P.)**.** Man habe 100 optisch ununterscheidbare Münzen von drei Typen: Gold, Silber und Kupfer. Darunter sei mindestens eine Münze jeden Typs. Jede Goldmünze wiege 3 Gramm, jede Silbermünze 2 Gramm und jede Kupfermünze 1 Gramm. Wie ermittelt man sicher den Typ jeder einzelnen Münze mit insgesamt nicht mehr als 101 Wägungen unter Benutzung einer Balkenwaage ohne Gewichte?

Aufgabe 4 (10 P.)**.** Man betrachte die in beide Richtungen unendliche aufsteigende Folge

$$\ldots < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \ldots,$$

positiver Zahlen. Zu jeder positiven ganzen Zahl k sei b_k die kleinste ganze Zahl, so dass das Verhältnis der Summe von beliebigen k aufeinanderfolgenden Folgengliedern zum größten dieser k Folgenglieder nicht größer ist als b_k. Beweise, dass die Folge $b_1, b_2, b_3, \ldots$ entweder mit der Folge $1, 2, 3, \ldots$ übereinstimmt oder ab einem gewissen Folgenglied konstant ist.

Aufgabe 5. Der Punkt M innerhalb eines konvexen Vierecks $ABCD$ habe den gleichen Abstand von den Geraden AB und CD sowie den gleichen Abstand von den Geraden BC und AD. Die Fläche von $ABCD$ ist $|MA| \cdot |MC| + |MB| \cdot |MD|$. Beweise, dass das Viereck $ABCD$ dann

(a) (6 P.) ein Tangentenviereck ist (also einen einbeschriebenen Kreis hat) und

(b) (6 P.) ein Sehnenviereck ist (also in einen Kreis einbeschrieben ist).

Aufgabe 6. Ein aus $(2N)^3$ Einheitswürfeln bestehender Würfel wird von einigen Nadeln durchstochen, die parallel zu den Kanten verlaufen (jede Nadel durchsticht genau $2N$ Einheitswürfel). Jeder Einheitswürfel wird von mindestens einer Nadel durchstochen. Wir nennen eine Teilmenge der Nadeln „regulär“, wenn kein Einheitswürfel von zwei Nadeln durchstochen wird.

(a) (6 P.) Beweise, dass es eine reguläre Teilmenge von $2N^2$ Nadeln gibt, so dass alle entweder in dieselbe Richtung zeigen oder in nur zwei verschiedene Richtungen.

(b) (6 P.) Was ist die größte Zahl, so dass in jedem Fall eine reguläre Menge dieser Größe existiert?

Aufgabe 7 (12 P.)**.** Einige der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ sind rot eingefärbt, so dass für jedes Tripel a, b, c an roten (nicht unbedingt verschiedenen) Zahlen gilt: Wenn $a(b - c)$ ein Vielfaches von n ist, dann gilt $b = c$. Beweise, dass es nicht mehr als $\varphi(n)$ rote Zahlen geben kann, wobei $\varphi(n)$ die Anzahl an zu n teilerfremden positiven ganzen Zahlen kleiner oder gleich n ist.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden. Viel Erfolg!