M Mittelstufe

Aufgabe 1 (4 P.). Wir sagen, dass ein Kreis ein Viereck *ordentlich* schneidet, wenn es jede Vierecksseite in genau zwei Punkten schneidet. Trifft es zu, dass es zu jedem konvexen Viereck einen Kreis gibt, der dieses ordentlich schneidet?

(Eine Menge ist genau dann konvex, wenn die Verbindungsstrecke von je zwei beliebigen Punkten der Menge vollständig in der Menge liegt.)

Aufgabe 2 (7 P.). Wir nennen ein Paar (a, b) unterschiedlicher positiver ganzer Zahlen *nett*, wenn sowohl deren arithmetisches Mittel $\frac{a+b}{2}$ als auch deren geometrisches Mittel $\sqrt{ab}$ ganze Zahlen sind. Trifft es zu, dass es zu jedem netten Paar ein weiteres nettes Paar mit dem gleichen arithmetischen Mittel gibt?

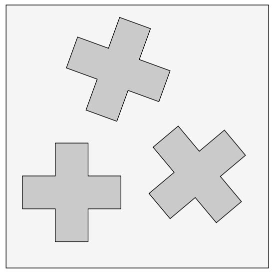
(Die Paare (a, b) und (b, a) sollen hier als dasselbe Paar angesehen werden.)

Aufgabe 3. Alice und Bob spielen das folgende Spiel. In jedem Zug schlägt Alice eine ganze Zahl vor und Bob schreibt entweder diese Zahl auf oder die Summe dieser Zahl und aller vorher aufgeschriebenen Zahlen. Ist es immer möglich, dass Alice dafür sorgen kann, dass zu irgendeinem Zeitpunkt unter den Zahlen

(a) (3 P.) mindestens 100-mal die Zahl 5 vorkommt bzw.

(b) (4 P.) mindestens 100-mal die Zahl 10 vorkommt?

Aufgabe 4 (7 P.). Das X-Pentomino besteht aus fünf 1×1-Quadraten, von denen vier jeweils seitlich an das fünfte angrenzen. Ist es möglich, neun solche Pentominos aus einen 8×8-Schachbrett auszuschneiden, wobei nicht unbedingt entlang der Gitterlinien geschnitten werden muss.
(Die Abbildung zeigt, wie man drei solche X-Pentominos ausschneiden kann.)



Aufgabe 5 (8 P.). Gibt es 100 positive ganze Zahlen, so dass die dritte Potenz einer der Zahlen gleich der Summe der dritten Potenzen aller anderen Zahlen ist?

Aufgabe 6 (10 P.). Es gibt zwei runde Tische, an denen jeweils n Zwerge sitzen. Jeder Zwerg hat nur zwei Freunde: seinen linken und seinen rechten Nachbarn. Ein guter Zauberer will alle Zwerge an einen runden Tisch setzen, so dass zwei Nachbarn immer Freunde sind. Sein Zauber ermöglicht es ihm, beliebige $2n$ Paare von Zwergen in Paare von Freunden zu verwandeln. Allerdings weiß er, dass ein böser Hexer n dieser neuen Freundschaften aufbrechen kann. Für welches n kann der gute Zauberer sein Ziel unabhängig davon erreichen, was der böse Hexer tut?

Aufgabe 7. Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, so dass keine drei seiner Seiten ein Dreieck bilden können. Beweise,

(a) (6 P.) dass einer der Viereckswinkel nicht größer als $60°$ ist und

(b) (6 P.) dass einer der Viereckswinkel mindestens $120°$ beträgt.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden. — Viel Erfolg!

O Oberstufe

Aufgabe 1 (4 P.)**.** Am Anfang waren n positive ganze Zahlen. Für jedes Paar (a, b) dieser Zahlen schrieb Boris deren arithmetisches Mittel $\frac{a+b}{2}$ auf eine Tafel (Blackboard) und deren geometrisches Mittel $\sqrt{ab}$ auf eine Weißwandtafel (Whiteboard). Es stellte sich heraus, dass für jedes Paar mindestens eins dieser Mittel eine ganze Zahl war. Beweise, dass auf mindestens einer der beiden Tafeln ausschließlich ganze Zahlen stehen.

Aufgabe 2 (5 P.)**.** Baron Münchhausen präsentiert einen neuen Satz: Wenn ein Polynom $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots$ Nullstellen bei n positiven ganzen Zahlen hat, dann gibt es a Geraden in der Ebene, so dass diese genau b Schnittpunkte haben. Ist der Satz des Barons richtig?

Aufgabe 3 (6 P.)**.** Zwei Kreise α und β mit jeweiligen Mittelpunkten A und B schneiden sich in den Punkten C und D. Die Strecke AB schneide α und β jeweils in den Punkten K und L. Der Strahl DK schneide den Kreis β das zweite Mal im Punkt N und der Strahl DL schneide den Kreis α das zweite Mal im Punkt M. Beweise, dass der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks $KLMN$ mit dem Inkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ zusammenfällt.

Aufgabe 4 (7 P.)**.** Es gibt zwei runde Tische, an denen jeweils n Zwerge sitzen. Jeder Zwerg hat nur zwei Freunde: seinen linken und seinen rechten Nachbarn. Ein guter Zauberer will alle Zwerge an einen runden Tisch setzen, so dass zwei Nachbarn immer Freunde sind. Sein Zauber ermöglicht es ihm, beliebige $2n$ Paare von Zwergen in Paare von Freunden zu verwandeln. Allerdings weiß er, dass ein böser Hexer n dieser neuen Freundschaften aufbrechen kann. Für welches n kann der gute Zauberer sein Ziel unabhängig davon erreichen, was der böse Hexer tut?

Aufgabe 5 (7 P.)**.** Gibt es ein Rechteck, das man in 100 Rechtecke zerteilen kann, so dass alle zum ursprünglichen ähnlich sind, aber keine zwei Rechtecke kongruent sind?

Aufgabe 6 (10 P.)**.** Alice und Bob spielen das folgende Spiel. Sie schreiben wie folgt einige Brüche $1/n$ mit positiven ganzen Zahlen n an die Tafel. Den ersten Zug macht Alice. Alice schreibt nur einen Bruch in jedem ihrer Züge, während Bob einen Bruch im ersten Zug schreibt, zwei Brüche im zweiten Zug, drei im dritten usw. Bob möchte erreichen, dass die Summe aller Brüche an der Tafel nach irgendeinem Zug eine ganze Zahl ist. Kann Alice dies verhindern?

Aufgabe 7 (12 P.)**.** Ein weißer Käfer sitzt im Eckfeld eines $1000 \times n$-Schachbretts, wobei n eine ungerade positive ganze Zahl mit $n > 2020$ ist. In den zwei nächsten Eckfeldern stehen zwei schwarze Läufer (Schachfiguren, die beliebig weit diagonal ziehen dürfen). In jedem Zug bewegt sich der Käfer auf ein horizontales oder vertikales Nachbarfeld oder zieht wie ein Springer (Schachfigur, die ein Feld horizontal oder vertikal und zusätzlich eins diagonal vorwärts zieht und dabei andere Figuren überspringen darf). Der Käfer möchte das gegenüberliegende Eckfeld erreichen, ohne die Felder zu betreten, die von einem Läufer besetzt oder bedroht werden (letzteres heißt, dass der Läufer dorthin ziehen könnte), und dabei auf dem Weg jedes der übrigen Felder genau einmal betreten. Zeige, dass die Anzahl an Wegen, auf denen der Käfer sein Ziel erreichen kann, nicht von n abhängt.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden. Viel Erfolg!