

M Mittelstufe

Aufgabe 1 (4 P.). Ist es möglich, dass das Produkt von 9 aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen gleich der Summe von (nicht unbedingt denselben) 9 aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen ist?

Aufgabe 2 (4 P.). Seien AX und BZ Höhen des Dreiecks $\triangle ABC$ sowie AY und BT Winkelhalbierende. Es ist bekannt, dass die Winkel $\angle XAY$ und $\angle ZBT$ gleich sind. Muss $\triangle ABC$ dann in jedem Fall gleichschenkelig sein?

Aufgabe 3 (4 P.). Maria hat eine Balkenwaage, die anzeigt, welche Waagschale schwerer ist oder ob beide das gleiche Gewicht haben. Außerdem hat Maria 4 Gewichte, die alle gleich aussehen, aber Massen von 1001, 1002, 1004 und 1005 g haben. Kann Maria die Massen mit 4 Wägungen bestimmen? Dabei darf sie die Gewichte jeweils abhängig vom Ergebnis der vorherigen Wägungen auswählen.

Aufgabe 4. (a) (3 P.) Kann man ein Quadrat in 4 gleichschenklige Dreiecke zerlegen, so dass keine zwei von ihnen kongruent zueinander sind?

(b) (3 P.) Kann man ein gleichseitiges Dreieck in 4 gleichschenklige Dreiecke zerlegen, so dass keine zwei von ihnen kongruent zueinander sind?

Aufgabe 5. Auf einem Spielbrett (Gitter aus quadratischen Feldern) liegen einige Dominosteine, die jeweils zwei benachbarte Felder belegen, so dass sich keine zwei der Dominosteine an den Seiten oder Ecken berühren. Die Felder unten links und oben rechts sind unbelegt. Ein Spielstein fängt auf dem Feld unten links an und kann in jedem Zug auf ein über die Kante benachbartes Feld ziehen: ein Schritt nach rechts oder oben in jedem Zug. Ist es immer möglich von unten links nach oben rechts zu ziehen, ohne dabei durch Dominosteine ziehen zu müssen, wenn das Spielbrett besteht aus

(a) (2 P.) 100×101 Feldern bzw.

(b) (4 P.) 100×100 Feldern?

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden.

Viel Erfolg!

O Oberstufe

Aufgabe 1. (a) (2 P.) Ein konvexes Fünfeck ist durch sich nicht schneidende Diagonalen in drei Dreiecke eingeteilt. Ist es möglich, dass die Schwerpunkte dieser Dreiecke auf einer gemeinsamen Geraden liegen?

(b) (2 P.) Dieselbe Frage für ein nicht-konvexes Fünfeck.

Aufgabe 2. (a) (2 P.) Maria hat eine Balkenwaage, die anzeigt, welche Waagschale schwerer ist oder ob beide das gleiche Gewicht haben. Außerdem hat Maria 4 Gewichte, die alle gleich aussehen, aber Massen von 1000, 1002, 1004 und 1005 g haben. Kann Maria die Massen mit 4 Wägungen bestimmen? Dabei darf sie die Gewichte jeweils abhängig vom Ergebnis der vorherigen Wägungen auswählen.

(b) (2 P.) Dieselbe Frage für den Fall, dass die linke Waagschale um 1 g leichter ist als die rechte, die Waage also dann Gleichheit anzeigt, wenn die Masse auf der linken Waagschale genau um 1 g schwerer ist als die Masse auf der rechten Waagschale.

Aufgabe 3 (5 P.). Für welche n ist es möglich, dass das Produkt von n aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen gleich der Summe von (nicht unbedingt denselben) n aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen ist?

Aufgabe 4 (5 P.). Es ist bekannt, dass eine quadratische Gleichung nicht mehr als 2 Nullstellen haben kann. Ist es möglich, dass eine Gleichung $[x^2] + px + q = 0$ mit $p \neq 0$ mehr als 100 Nullstellen hat? (Mit $[x^2]$ bezeichnen wir die größte ganze Zahl nicht größer als x^2 .)

Aufgabe 5 (6 P.). Sei O der Umkreismittelpunkt des spitzwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$. Sei M der Mittelpunkt von AC . Die Gerade BO schneide die Höhen AA_1 und CC_1 in den Punkten H_a bzw. H_c . Die Umkreise der Dreiecke $\triangle BH_aA$ und $\triangle BH_cC$ schneiden einander (neben B) ein zweites Mal im Punkt K . Beweise, dass K auf der Geraden BM liegt.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden.

Viel Erfolg!