Kapitel 3: Konvergenz von Folgen und Reihen

3.1 Folgen

Es sei V ein normierter Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$

Eine **Folge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to V$, $n \to a_n \in V$

Beispiele:

1) Reelle Folgen ($V = \mathbb{R}$): $a_n = \dfrac{1}{n}$
2) Komplexe Folgen ($V = \mathbb{C}$): $a_n = i^n$
3) Folgen von (reellen) Vektoren ($V = \mathbb{R}^d$, $d = 3$)

$$a_n = \left(\frac{1}{n}, n, \frac{1}{n^2}\right)^T$$

Rechenoperationen mit Folgen:

Die Menge aller Folgen in V ist wieder ein Vektorraum $V^{\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ \lambda(a_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

Rekursion, Iteration:

Definiere eine Folge in V **rekursiv**

$$a_{n+1} := \Phi(n, a_n)$$

wobei

$$\Phi : \mathbb{N} \times V \to V$$

eine **Iterationsvorschrift** ist.

Beispiel: Intervallhalbierung, Bisektionsverfahren

Berechnung einer Nullstelle einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Gegeben seien zwei reelle Zahlen a und b mit $f(a) \cdot f(b) < 0$

Definiere zwei Folgen (u_n) und (v_n) mittels

$(u_0, v_0) := (a, b)$

für $n = 1, 2, \ldots$

$x := (u_{n-1} + v_{n-1})/2$

falls $f(x) = 0 \quad \to \quad$ fertig

falls $(f(x) \cdot f(v_{n-1}) < 0)$:

$u_n := x \quad v_n := v_{n-1}$

sonst

$u_n := u_{n-1} \quad v_n := x$

Sei $f(t) = t^2 - 2$, $a = 1$ und $b = 2$, so erhält man

n	u_n	v_n
0	1.0000 00000	2.0000 00000
1	1.0000 00000	1.5000 00000
2	1.2500 00000	1.5000 00000
3	1.3750 00000	1.5000 00000
⋮	⋮	⋮
10	1.4140 62500	1.4150 39063
20	1.4142 13181	1.4142 14134
30	1.4142 13562	1.4142 13562
⋮	⋮	⋮

Konvergenz ist relativ langsam!

Beispiel: Newton–Verfahren

Nullstelle einer stetig–differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$t_{n+1} := t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)} \quad (f'(t_n) \neq 0)$$

mit Startwert t_0

Verfahren konvergiert, falls t_0 hinreichend nahe bei einer Nullstelle t^* liegt

Sei $f(t) = t^2 - 2$ und $t_0 = 1$, so erhält man

n	t_n
0	1.0000 00000
1	1.5000 00000
2	1.4166 66667
3	1.4142 15686
4	1.4142 13562
$\vdots$	$\vdots$

Definition: **Konvergenz von Folgen**

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in V (Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$)

1) Für $n_j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ heißt $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ eine **Teilfolge** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

2) Die Folge (a_n) heißt **beschränkt**, falls es ein $C > 0$ gibt mit:
$\forall\, n \in \mathbb{N} \;:\; \|a_n\| \leq C$

3) Eine Folge (a_n) heißt **konvergent** mit **Grenzwert (Limes)** $a \in V$, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;:\; \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n \geq N \;:\; \|a_n - a\| < \varepsilon$$

Eine nicht–konvergente Folge heißt **divergent**

4) Eine Folge (a_n) heißt **Cauchy–Folge**, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;:\; \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n, m \geq N \;:\; \|a_n - a_m\| < \varepsilon$$

Satz: Es gelten:

a) (a_n) konvergent $\Rightarrow$ (a_n) beschränkt

b) (a_n) konvergent $\Rightarrow$ (a_n) Cauchy–Folge

c) Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig bestimmt

Beweis:

Teil a): Ist (a_n) konvergent, so gilt für $\varepsilon > 0$ und $n \geq N(\varepsilon)$

$$\|a_n\| = \|a_n - a + a\| < \varepsilon + \|a\|$$

Damit ist die Folge (a_n) beschränkt mit der Konstanten $C > 0$ gegeben durch

$$C := \max\{\|a_1\|, \|a_2\|, \ldots, \|a_{N-1}\|, \|a\| + \varepsilon\}$$

Also

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;:\; \|a_n\| \leq C$$

Teil b): Für gegebenes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|a_n - a_m\| &= \|a_n - a + a - a_m\| \\
&\leq \|a_n - a\| + \|a_m - a\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

für alle $n, m \geq N = N(\varepsilon/2)$

Teil c): Für $\varepsilon > 0$ gelte:

$$\|a_n - a\| < \varepsilon \quad (\forall n \geq N_1(\varepsilon))$$

$$\|a_n - \overline{a}\| < \varepsilon \quad (\forall n \geq N_2(\varepsilon))$$

Dann folgt für $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ die Ungleichung

$$\|a - \overline{a}\| = \|a - a_n + a_n\overline{a}\| \leq \|a_n - a\| + \|a_n - \overline{a}\| < 2\varepsilon$$

Dies gilt für jedes $\varepsilon > 0$, also gilt $a = \overline{a}$

Notation: Für eine konvergente Folge (a_n) schreiben wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \to a\ (n \to \infty)$$

Uneigentliche Konvergenz bzw.
Divergenz gegen den uneigentlichen Grenzwert $\pm\infty$:

Für **reelle** Folgen definieren wir zusätzlich

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \ :\Leftrightarrow\ \forall\, C > 0 \ :\ \exists\, N \in \mathbb{N} \ :\ \forall\, n \geq N \ :\ a_n > C$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \ :\Leftrightarrow\ \forall\, C > 0 \ :\ \exists\, N \in \mathbb{N} \ :\ \forall\, n \geq N \ :\ a_n < -C$$

Bemerkung: Die Umkehrung zu der Aussage in Teil b)

$$(a_n) \text{ Cauchyfolge} \quad \Rightarrow \quad (a_n) \text{ konvergent}$$

gilt nur in gewissen normierten Räumen, nämlich den sogenannten

vollständigen Räumen oder Banachräumen

Vollständige Euklidische Vektorräume nennt man auch

Hilberträume

Beispiele vollständiger Räume: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$
Beispiel für einen nicht vollständigen Raum: $(C[a,b], \|\cdot\|_2)$

Satz: Sind (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen, so konvergieren auch die beiden Folgen $(a_n + b_n)$ und (λa_n) und es gelten

$$\text{a)} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\text{b)} \quad \lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n$$

Beweis: Sei

$$a := \lim_{n\to\infty} a_n \qquad b := \lim_{n\to\infty} b_n$$

Teil a): Für $n \geq \max\{N_1(\varepsilon/2), N_2(\varepsilon/2)\}$ gilt

$$\|(a_n + b_n) - (a - b)\| \leq \|a_n - a\| + \|b_n - b\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Teil b): Für $n \geq N_1(\varepsilon/|\lambda|)$ und $\lambda \neq 0$ gilt

$$\|\lambda a_n - \lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a_n - a\| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

Der Fall $\lambda = 0$ ist trivial

Konvergenzgeschwindigkeit:

Definition: Die Folge (a_n) sei konvergent mit Grenzwert a

a) Die Folge (a_n) heißt (mindestens) **linear konvergent**, falls eine Konstante $0 < C < 1$ und ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert mit:

$$\forall\, n \geq N \;:\; \|a_{n+1} - a\| \leq C\|a_n - a\|$$

b) Die Folge (a_n) heißt (mindestens) **superlinear konvergent**, falls eine nicht–negative Nullfolge $C_n \geq 0$ mit $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$ existiert, so dass

$$\forall\, n \;:\; \|a_{n+1} - a\| \leq C_n\|a_n - a\|$$

c) Die Folge (a_n) heißt konvergent mit der **Ordnung** (mindestens) $p > 1$, falls eine nicht–negative Konstante $C \geq 0$ existiert, so dass

$$\forall\, n \;:\; \|a_{n+1} - a\| \leq C\|a_n - a\|^p$$