3.2 Konvergenzkriterien für reelle Folgen

Definition: Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

monoton wachsend	$:\Leftrightarrow \quad \forall\, n < m \; : \; a_n \leq a_m$
streng monoton wachsend	$:\Leftrightarrow \quad \forall\, n < m \; : \; a_n < a_m$
nach oben beschränkt	$:\Leftrightarrow \quad \exists\, C \in \mathbb{R} \; : \; \forall n \; : \; a_n \leq C$

Analog: monoton fallend, streng monoton fallend, nach unten beschränkt

Satz: Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

Satz: Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

Beweis: Folge ist nach oben beschränkt $\Rightarrow \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ besitzt Supremum

$$s := \sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $N = N(\varepsilon)$ mit

$$s - \varepsilon < a_N \leq s$$

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, also folgt

$$s - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq s \quad \forall\, n \geq N$$

d.h.

$$|s - a_n| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N(\varepsilon)$$

Folgerung: Prinzip der Intervallschachtelung

Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend

b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend

c) $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad : \quad a_n \le b_n$

so sind **beide Folgen konvergent**.

Gilt überdies

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$$

so haben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denselben Grenzwert, i.e.

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Zusätzlich gelten die Fehlerabschätzungen

$$|a_n - \xi| \le |b_n - a_n| \qquad |b_n - \xi| \le |b_n - a_n|$$

Beispiel: Arithmetisch–geometrisches Mittel

Definiere für $0 < a < b$ rekursiv zwei Folgen (a_n) und (b_n) mittels

$$\begin{array}{ll} a_0 := a & b_0 := b \\ a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n} & b_{n+1} := \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{array}$$

Folgen (a_n) und (b_n) bilden Intervallschachtelung und es gilt

$$(b_{n+1} - a_{n+1}) \le \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

Der gemeinsame Grenzwert von (a_n) und (b_n)

$$\text{agm}(a, b) := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

heißt

Arithmetisch–geometrisches Mittel

Bernoullische Ungleichung:

$$\forall\, x \geq -1,\ n \in \mathbb{N}\ :\ (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Gleichheit gilt nur bei $n = 1$ oder $x = 0$

Beispiel: Geometrische Folge $a_n := q^n$ mit $q \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
q > 1 &\ :\ \lim_{n\to\infty} q^n = +\infty \quad (q^n = (1+(q-1))^n \geq 1 + n(q-1)) \\
q = 1 &\ :\ \lim_{n\to\infty} q^n = 1 \\
0 < q < 1 &\ :\ \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (q^n = \tfrac{1}{(1+(1/q-1))^n} \leq \tfrac{1}{1+n(1/q-1)}) \\
-1 < q \leq 0 &\ :\ \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (|q^n| = |q|^n) \\
q = -1 &\ :\ (q^n) \text{ beschränkt, aber nicht konvergent} \quad (q^n \in \{-1, 1\}) \\
q < -1 &\ :\ (q^n) \text{ divergent, kein uneigentlicher Grenzwert}
\end{aligned}$$

Satz: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente reelle Folgen. Dann gelten

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$

b) $\forall\, n\ :\ b_n \neq 0 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

c) $\forall\, n\ :\ a_n \geq 0 \wedge m \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$

Beweis: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

Teil a): Es gilt (für hinreichend große n)

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\le |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\ &\le C_a \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\ &< (C_a + |b|)\varepsilon \end{aligned}$$

Teil b): Da $b_n \neq 0$ und $b \neq 0$ existiert eine Konstante $C_b > 0$ mit

$$C_b \le |b_n| \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Damit gilt

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = \frac{1}{|b_n| \cdot |b|} \cdot |b_n - b| \le \frac{1}{C_b \cdot |b|} \cdot \varepsilon$$

für n hinreichend groß und die Aussage in b) folgt direkt aus Teil a)
(denn $1/b_n \to 1/b$)

Teil c): Wir setzen folgenden Satz voraus (Beweis Ansorge/Oberle):

Satz: Zu $a > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ existiert genau eine Zahl $w > 0$ mit $w^m = a$.
Diese Zahl wird mit $w = \sqrt[m]{a}$ bezeichnet.

1. Fall: Sei (a_n) eine Nullfolge und $\varepsilon > 0$ vorgegeben

$$a_n < \varepsilon^m \quad \forall\, n \ge N(\varepsilon^m)$$

Daraus folgt

$$0 \le \sqrt[m]{a_n} < \varepsilon$$

und daher $\sqrt[m]{a_n} \to 0$ für $n \to \infty$

2. Fall: Sei $a > 0$. Verwende die Identität

$$x^m - y^m = (x - y) \sum_{j=1}^{m} x^{m-j} y^{j-1}$$

Identität:

$$
\begin{aligned}
(x-y)\sum_{j=1}^{m} x^{m-j}y^{j-1} &= (x-y)\cdot(x^{m-1}y^0 + x^{m-2}y^1 + \ldots + x^0y^{m-1}) \\
&= x^m y^0 + \ldots + x^0 y^{m-1} - x^{m-1}y^1 - \ldots x^0 y^m \\
&= x^m - y^m
\end{aligned}
$$

Setze nun $x = \sqrt[m]{a_n}$ und $y = \sqrt[m]{a}$. Dann folgt

$$
\begin{aligned}
\left|\sqrt[m]{a_n} - \sqrt[m]{a}\right| &= \frac{|a_n - a|}{\left|(\sqrt[m]{a_n})^{m-1} + \ldots + (\sqrt[m]{a})^{m-1}\right|} \\
&\le \frac{|a_n - a|}{(\sqrt[m]{a})^{m-1}} \\
&< C\cdot\varepsilon
\end{aligned}
$$

für $n \geq N(\varepsilon)$

Bemerkung: Die Aussagen a) und b) gelten auch für komplexe Folgen

Beispiel: Gegeben sei die Folge

$$
a_n := \sqrt{n^2 + 5n + 1} - n
$$

Eine Umformung ergibt:

$$
a_n = \frac{(n^2+5n+1)-n^2}{\sqrt{n^2+5n+1}+n} = \frac{5+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}
$$

und damit

$$
\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{5+0}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{5}{2}
$$

Beispiel: Wir betrachten die Folge

$$a_n := \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$$

Kapitalverzinsung: Anfangskapital K_0, Jahreszinssatz p

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0(1+p) && \text{jährlich} \\ K_2 &= K_0\left(1+\frac{p}{2}\right)^2 && \text{halbjährlich} \\ K_4 &= K_0\left(1+\frac{p}{4}\right)^4 && \text{vierteljährlich} \\ K_{10} &= K_0\left(1+\frac{p}{10}\right)^{10} && \text{monatlich} \\ K_{360} &= K_0\left(1+\frac{p}{360}\right)^{360} && \text{täglich} \end{aligned}$$

Untersuche die Konvergenz der Folge a_n:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad = \quad ?$$

Für $p > 0$ zeigt man direkt:

- die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

- die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^n \le 4^l \quad \text{(für ein } l \ge p\text{)}$$

Damit konvergiert die Folge:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad = \quad e^p$$

Formel gilt auch für negative p.
Spezialfall

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182\,81828\ \ldots$$

(**Eulersche Zahl**)

Satz: (Cauchysches Konvergenzkriterium)
Der $\mathbb{R}$ ist **vollständig**, d.h. jede reelle Cauchyfolge ist konvergent.

Zum Beweis verwendet man das Konzept von

Häufungspunkten

einer gegebenen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel auf Folie

Definition: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Die Grenzwerte konvergenter Teilfolgen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nennt man die **Häufungspunkte der Folge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz: (Satz von Bolzano, Weierstraß)
Jede reelle, beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Satz: (Cauchysches Konvergenzkriterium)
Der $\mathbb{R}$ ist **vollständig**, d.h. jede reelle Cauchyfolge ist konvergent.

Beweisidee:

Zeige zunächst, dass jede Cauchyfolge beschränkt ist:

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| < \varepsilon + |a_N|$$

Nach Bolzano, Weierstraß besitzt (a_n) einen Häufungspunkt ξ. Dann gilt

$$\begin{aligned} |a_m - \xi| &= |a_m - a_{n_k} + a_{n_k} - \xi| \\ &\leq \underbrace{|a_m - a_{n_k}|}_{\text{Cauchyfolge}} + \underbrace{|a_{n_k} - \xi|}_{\text{Häufungspunkt}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Notation:

$\liminf a_n$ = kleinster Häufungspunkt

$\limsup a_n$ = größter Häufungspunkt