Beispiele stetiger Funktionen:

1) Konstante Funktionen $f : D \to W, \quad f(x) = a \in W$ sind stetig.
2) Die Identität auf einem normierten Vektorraum ist stetig

$$f : V \to V, \quad f(x) = x$$

3) Die Polynomfunktionen

$$y = f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

als Funktionen $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind stetig.

4) Polynomfunktionen in n Variablen

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{m} a_{k_1,\ldots,k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$$

sind stetig

Beispiele stetiger Funktionen: (Fortsetzung)

5) Die Funktion $\sqrt[m]{x} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $[0, \infty)$
6) Potenzreihen der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

sind auf dem Bereich der absoluten Konvergenz der Reihe stetig.
Beispiele: $\exp(z), \ln z, \sin z, \cos z, \tan z, \ldots$

7) Sind die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ stetig im Punkt x_0, so auch

$$f(x) + g(x), \quad \lambda \cdot f(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x_0) \neq 0)$$

8) Die Komposition stetiger Funktionen ist wieder eine stetige Funktion
Beispiel: $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$ ist auf dem ganzen $\mathbb{R}^2$ stetig

Satz: (ohne Beweis) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, reellwertige Funktion, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt.

1) **Existenz einer Nullstelle:**

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, x_0 \in (a,b) \;:\; f(x_0) = 0$$

2) **Zwischenwertsatz:**

$$f(a) < c < f(b) \quad \Rightarrow \quad \exists\, x_0 \in (a,b) \;:\; f(x_0) = c$$

3) **Stetigkeit der Umkehrfunktion:**
Ist $f(x)$ streng monoton wachsend, d.h. mit $x < y$ folgt $f(x) < f(y)$, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend.

4) **Min–Max–Eigenschaft:**
Es gibt $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit:

$$f(x_1) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \qquad f(x_2) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

Wichtige Bemerkung:

Bei der Min–Max–Eigenschaft ist es wesentlich, dass man ein **kompaktes** (d.h. beschränktes und abgeschlossenes) Intervall $[a,b]$ betrachtet. Sonst gilt die Aussage nicht!!!

Beispiel:

Betrachte die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D = (0, \infty) \subset \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Es gilt

$$D' = [0, \infty), \qquad D \cap D' = (0, \infty)$$

Die Funktion ist auf $D \cap D' = (0, \infty)$ stetig, nimmt aber weder ein Minimum noch Maximum an.

Min–Max–Eigenschaft ist nicht anwendbar, da D nicht kompakt ist!!!

Min–Max–Eigenschaft bei Funktionen mehrerer Veränderlicher:

Definition: Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **kompakt (folgenkompakt)**, falls jede Folge $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{x}_k \in D$, eine **in der Menge** D konvergente Teilfolge $\mathbf{x}_{k_j} \to \mathbf{x}_0 \in D$ $(j \to \infty)$ besitzt.

Satz: Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es Punkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$ mit

$$f(\mathbf{x}_1) = \min_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x}) \qquad f(\mathbf{x}_2) = \max_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$$

Merkregel:

Eine stetige Funktion nimmt auf einem Kompaktum ihr Minimum und Maximum an.

Satz: (Kriterien für Kompaktheit)

Für eine Menge $D \subset \mathbb{R}$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

1) D ist kompakt
2) D ist abgeschlossen und beschränkt
3) **Heine–Borel–Überdeckung:**
   Jede Überdeckung von D aus offenen Mengen besitzt eine endliche Teilüberdeckung:

$$D \subset \bigcup_{i\in I} U_i, \quad U_i \text{ offen} \quad \Rightarrow \quad \exists\, i_1, \ldots, i_k \in I \;:\; D \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_{i_j}$$

Beispiel: Sei S^{n-1} die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|$:

$$S^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

Offensichtlich ist S^{n-1} kompakt (abgeschlossen und beschränkt). Damit existieren für jede gegebene Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ zwei Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S^{n-1}$ mit

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}_1\| = \min_{\mathbf{x} \in S^{n-1}} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \qquad \|\mathbf{A}\mathbf{x}_2\| = \max_{\mathbf{x} \in S^{n-1}} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$$

Dies folgt aus der Min–Max–Eigenschaft, denn die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$$

ist stetig.

Gleichmäßige Stetigkeit:

Definition: Eine Funktion $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **gleichmäßig stetig**, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ : \ \exists \delta > 0 \ : \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{x_0} \in D \ :$$
$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x_0})\| < \varepsilon$$

Satz:

Jede stetige Funktion auf einem Kompaktum D ist gleichmäßig stetig.

Beispiel: Die Funktion $f(x) = \exp(x)$ ist offensichtlich stetig auf $\mathbb{R}$.
Ist $f(x)$ auch gleichmäßig stetig?