

Beispiel: Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion

Betrachte die Exponentialfunktion $f(x) := \exp(x)$. Zunächst gilt:

$$(\exp(x))' = \exp(x)$$

Daher gilt nach der Taylor-Entwicklung mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x; 0)$$

Das Restglied lautet:

$$R_n(x; 0) = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \xi = \theta x, \quad 0 < \theta < 1$$

Fehlerabschätzung für $0 \leq x \leq 1$:

$$|R_n(x; x_0)| = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

Zum Beispiel: $|R_{10}(x; x_0)| \leq 6.81 \cdot 10^{-8}$

149

Beispiel: Taylor-Entwicklung der Sinusfunktion

Betrachte die Sinusfunktion $f(x) := \sin x$. Zunächst gilt:

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

Daher gilt nach der Taylor-Entwicklung mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x; 0)$$

Das Restglied lautet:

$$R_{2n+2}(x; 0) = (-1)^{n+1} \frac{\cos \xi}{(2n+3)!} x^{2n+3}, \quad \xi = \theta x, \quad 0 < \theta < 1$$

Für $x \in [-\pi/6, \pi/6]$, $x \neq 0$ und $n = 3$ ergibt sich folgende Abschätzung für den **relativen Fehler**:

$$\left| \frac{R_8(x; 0)}{\sin x} \right| = \left| \frac{R_8(x; 0)}{R_0(x; 0)} \right| \leq 1.63 \cdot 10^{-8}$$

150

Bemerkung:

Die Taylor–Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

einer C^∞ –Funktion ist im Allgemeinen

nicht konvergent.

Konvergiert die Reihe, so nicht notwendigerweise gegen $f(x)$.

Gilt aber

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

so nennt man die Funktion f **reell analytisch** oder eine C^ω –Funktion.

151

Folgerungen aus der Taylor–Formel:

a) **Satz:** Gilt für eine C^{n+1} –Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall x \in [a, b] \quad : \quad f^{(n+1)}(x) = 0$$

so ist $f(x)$ ein Polynom höchstens n –ten Grades.

Begründung:

Das Restglied $R_n(x; x_0)$ nach Lagrange verschwindet identisch.

b) **Satz:** Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 –Funktion und $x^* \in (a, b)$ eine einfache Nullstelle dieser Funktion. Dann ist das Newton–Verfahren mit Startwerten in der Nähe von x^* **quadratisch konvergent**.

Begründung: Aus der Taylor–Entwicklung zweiter Ordnung folgt:

$$(x_{n+1} - x^*) = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} (x_n - x^*)^2 \quad \xi_n \in \begin{cases} (x_n, x^*) \\ (x^*, x_n) \end{cases}$$

152

c) Taylor–Formel für Polynome:

Ist die Funktion $f(x)$ selbst ein Polynom vom Grad n , also

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad (a_n \neq 0)$$

so ist das Taylor–Polynom n –ten Grades zu einem beliebigen Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

identisch zu $f(x)$, d.h.

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Damit ist $p(x)$ nur eine Umordnung bezüglich des Punktes x_0 .

153

d) Satz: (Kriterien für lokale Extrema II)

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 –Funktion, so gilt für $x_0 \in (a, b)$:

- 1) $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)$ hat in x_0 ein strenges lokales Minimum.
- 2) $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x)$ hat in x_0 ein strenges lokales Maximum.

Problem: Was passiert im Fall $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$?

Hier gibt es zwei Möglichkeiten

- 1) Der stationäre Punkt ist tatsächlich ein **strenges lokales Minimum oder Maximum**.
- 2) Der stationäre Punkt ist ein **Wendepunkt**.

Frage: Wann gilt 1) oder 2)?

154

1) Der stationäre Punkt ist tatsächlich ein **strenges lokales Minimum oder Maximum**, wenn gilt:

Ist f eine C^{2n} -Funktion ($n \in \mathbb{N}$) und gilt:

$$\forall k = 1, 2, \dots, 2n - 1 \quad : \quad f^{(k)}(x_0) = 0$$

so ist x_0 ein strenges lokales Minimum bzw. Maximum, falls

$$f^{(2n)}(x_0) > 0 \quad \text{bzw.} \quad f^{(2n)}(x_0) < 0$$

Beispiel: Betrachte die Funktion $f(x) = x^5 - x^4$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 - 4x^3 & f''(x) &= 20x^3 - 12x^2 \\ f^{(3)}(x) &= 60x^2 - 24x & f^{(4)}(x) &= 120x - 24 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$f'(0) = 0 \quad f''(0) = 0 \quad f^{(3)}(0) = 0 \quad f^{(4)}(0) = -24$$

155

2) Wendepunkt = Links-Rechtskurve oder Rechts-Linkskurve

Konvexität

Definition: Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **konvex** (oder eine **Linkskurve**), falls für alle $x_1 < x < x_2$ in $[a, b]$ gilt:

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1))$$

Die Funktion $f(x)$ heißt **konkav** (oder eine **Rechtskurve**), falls für alle $x_1 < x < x_2$ in $[a, b]$ gilt:

$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1))$$

Gelten jeweils die Ungleichungen mit $<$ bzw. $>$, so nennt man die Funktionen **streng konvex** bzw. **streng konkav**.

156

Satz: Sei $f(x)$ eine C^2 -Funktion auf $[a, b]$. Dann gilt:

$$\forall x \in (a, b) : f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ streng konvex}$$

$$\forall x \in (a, b) : f''(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ streng konkav}$$

Bemerkung: Der Graph einer konvexen, differenzierbaren Funktion liegt stets oberhalb seiner Tangenten.

Definition: Für eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sagt man:

$f(x)$ hat in $x_0 \in (a, b)$ einen **Wendepunkt**, falls

- 1) $f(x)$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ in $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ konvex und in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ konkav ist (**Links-Rechtskurve**)

oder

- 2) $f(x)$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ in $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ konkav und in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ konvex ist (**Rechts-Linkskurve**)

157

Satz: (Kriterien für Wendepunkte)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^3 -Funktion

- 1) Ist $x_0 \in (a, b)$ ein Wendepunkt, so gilt: $f''(x_0) = 0$
- 2) Gilt für $x_0 \in (a, b)$: $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) > 0$, so ist x_0 ein **Wendepunkte** und $f(x)$ ist bei x_0 eine **Rechts-Linkskurve**.

Gilt für $x_0 \in (a, b)$: $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) < 0$, so ist x_0 ein **Wendepunkte** und $f(x)$ ist bei x_0 eine **Links-Rechtskurve**.

Beispiel: Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^4 - x^3$:

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 \quad f''(x) = 12x^2 - 6x \quad f'''(x) = 24x - 6$$

Im Punkt $x_0 = 0$: $f'(0) = 0$ $f''(0) = 0$ $f'''(0) = -6$

\Rightarrow Die Funktion hat in $x_0 = 0$ einen Wendepunkt (Links-Rechtskurve)

Lokales Minimum bei $x_1 = 3/4$: $f'(3/4) = 0$ $f''(3/4) = 9/4$

158