5.2 Die Regeln von de l'Hospital

Wie berechnet man den Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

falls gilt:

1) Beide Funktionen konvergieren gegen Null, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

2) Beide Funktionen konvergieren gegen Unendlich, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

Bespiel: Sei $f(x) = x^2$ und $g(x) = x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} x = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} x = \infty$$

Satz: **(Regel von de l'Hospital für $\frac{0}{0}$)**

Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sei $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und es gelte $g(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$.

Dann folgt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sofern der rechts stehende Grenzwert existiert.

Beweis:

Mit Hilfe des zweiten Mittelwertsatzes:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

wobei ξ ein Punkt zwischen x und x_0 ist.

Konvergiert nun x gegen x_0, so konvergiert auch ξ gegen x_0.

Regel von de l'Hospital gilt wie angegeben für:

1) Wir betrachten einseitige Grenzwerte:

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2) Rechte Seite divergiert gegen $+\infty$ oder $-\infty$, d.h. gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$$

so lautet die Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$$

3) Wir betrachten uneigentliche Grenzwerte der Form:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Satz: (Regel von de l'Hospital für $\frac{\infty}{\infty}$)

Seien $f, g : (a,b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sei $x_0 \in (a,b)$.

Ferner gelte:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$$

und $g'(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$.

Dann folgt:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sofern der rechts stehende Grenzwert existiert.

Beispiele:

1)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

2)

$$\lim_{x \to \infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = 2$$

3)

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2}$$

5.3 Kurvendiskussion

Ziel einer Kurvendiskussion ist die Feststellung des qualitativen und quantitativen Verhaltens des Graphen einer gegebenen Funktion $y = f(x)$:

1. Definitionsbereich, Wertebereich

2. Symmetrien

3. Pole

4. Verhalten im Unendlichen

5. Nullstellenbestimmung

6. Bestimmung der Extrema

7. Wendepunkte

8. Skizze

Erklärungen:

1) Eine Funktion ist **symmetrisch zur y–Achse** (gerade Funktion), falls für alle x gilt: $f(-x) = f(x)$.

2) Eine Funktion ist **symmetrisch zum Ursprung** (ungerade Funktion), falls für alle x gilt: $f(-x) = -f(x)$.

3) Eine Funktion $f(x)$ besitzt in x_0 einen **Pol**, falls gilt

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x - x_0)^k}$$

wobei $g(x)$ stetig in x_0 ist und $g(x_0) \neq 0$.
Ist k ungerade, so ist der Pol ein **Pol mit Vorzeichenwechsel**. Ist k gerade, so ist der Pol ein **Pol ohne Vorzeichenwechsel**.

4) Eine Gerade $y = \alpha x + \beta$ heißt **Asymptote** von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$, falls gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - \alpha x - \beta) = 0$$

5) Die Koeffizienten einer Asymptoten ergeben sich durch

$$\alpha = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \beta = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - \alpha x)$$

Beispiel: Kurvendiskussion für die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2}$$