

## 5.4 Fixpunkt–Iteration

Nochmals: Iterative Lösung der (nichtlinearen) Gleichung

$$f(x) = 0$$

Abschnitt 3.1 der Vorlesung:

- Bisektionsverfahren (Intervallhalbierung)
- Newton–Verfahren

**Iteratives Verfahren:** Fixpunkt–Iteration mit Verfahrensfunktion  $\Phi$

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

und

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(x_k) = \Phi(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = \Phi(x^*)$$

167

**Fixpunkt–Iteration:** Löse statt  $f(x) = 0$  das Fixpunkt–Problem

$$x = \Phi(x)$$

mittels der Iteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Aber: Verfahrensfunktion  $\Phi$  ist nicht eindeutig!

**Beispiel:** Suche im Intervall  $(0, \pi/2)$  die eindeutige Nullstelle von

$$f(x) := 2x - \tan x$$

**1. Iteration** mittels

$$2x - \tan x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \tan x =: \Phi_1(x)$$

**2. Iteration** mittels

$$2x - \tan x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \arctan 2x =: \Phi_2(x)$$

168

**Ergebnis** der 1. Iteration und 2. Iteration:

- Iterationen

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \tan x_k \quad y_{k+1} = \arctan 2y_k$$

- Wähle als Anfangsnäherung in beiden Iterationen

$$x_0 := 1.2 \quad y_0 := 1.2$$

- Beide Iterationen konvergieren im Grenzwert  $k \rightarrow \infty$ , aber

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 1.1655\ 61185$$

- Berechne die Iterationen mittels eines Computerprogramms

**Konvergenzgeschwindigkeit** hängt ab von

dem Abstand zwei benachbarter Folgenglieder:  $|x_{k+1} - x_k|$

169

**Definition:** Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum.

Eine Abbildung  $\Phi : D \rightarrow V$ ,  $D \subset V$  heißt **Lipschitz–stetig** auf  $D$ , falls eine Konstante  $L$  existiert, sodass

$$\forall x, y \in D \quad : \quad \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\|$$

Die Konstante  $L$  nennt man **die Lipschitz–Konstante**.

**Definition:** Eine Abbildung  $\Phi : D \rightarrow V$ ,  $D \subset V$  heißt **kontrahierend**, falls  $L < 1$  gilt.

Man nennt dann  $L$  die **Kontraktionskonstante** von  $\Phi$ .

**Bemerkung:** Jede Lipschitz–stetige Funktion ist stetig!

Es gelte die Abschätzung

$$\forall x \neq y \quad : \quad \|\Phi(x) - \Phi(y)\| < \|x - y\|$$

Dann ist  $\Phi$  nicht notwendigerweise kontrahierend!

170

**Satz:** Jede  $C^1$ -Funktion  $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist Lipschitz-stetig auf  $[a, b]$  mit der Lipschitz-Konstanten

$$L := \sup \{ |\Phi'(x)| : a \leq x \leq b \}$$

**Beweis:** Aus dem Mittelwertsatz folgt

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)| |x - y| \leq L |x - y|$$

171

**Satz: Banachscher Fixpunktsatz**

Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein vollständiger normierter Raum (Banachraum). Ferner sei  $D \subset V$  abgeschlossen und  $\Phi : D \rightarrow D$  eine kontrahierende Abbildung der Menge  $D$  in sich mit einer Kontraktionskonstanten  $L$ .

Dann gelten die folgenden Aussagen:

- 1) Es gibt genau einen Fixpunkt  $x^*$  von  $\Phi$  in  $D$
- 2) Für jeden Startwert  $x_0 \in D$  konvergiert die Fixpunkt-Iteration  $x_{k+1} = \Phi(x_k)$  gegen den Fixpunkt  $x^*$
- 3) Es gelten die Fehlerabschätzungen:

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\|$$

172