

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 21:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + 2x & \text{für } x \geq 0 \\ 1 & \text{für } x < 0 \end{cases} .$$

Ist der Mittelwertsatz: $g'(x_0) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$ mit $x_0 \in]a, b[$

für $a = -\frac{\pi}{2}$ und $b = \frac{\pi}{2}$ auf f anwendbar?

Aufgabe 22: (aus dem Vordiplom Analysis I, SS05, 5.9.2005)

a) Man berechne die folgenden Grenzwerte

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x/3 - 3 + \sqrt{9 - 2x}}$,

(ii) $\lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) \cdot \cot x$.

b) Gegeben sei die durch $f(x) = \sin(\pi^2 - x^2)$ definierte Funktion.

(i) Man berechne das Taylorpolynom $T_2(x; x_0)$ von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$.

(ii) Man schätze den Fehler zwischen $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und $T_2\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ nach oben ab.

Aufgabe 23: (aus dem Vordiplom Analysis I, Version A, WS04/05, 31.3.2005)

Gegeben sei die durch

$$f(x) = \exp\left(-x - \frac{4}{x+3}\right)$$

definierte reellwertige Funktion. Dabei bezeichnet \exp die e -Funktion, d.h. $\exp(x) = e^x$.

- a) Man gebe den maximalen Definitionsbereich D von f an.
- b) Wie viele Nullstellen besitzt f .
- c) Man berechne $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$.
- d) Man untersuche das Verhalten von f im Unendlichen.
- e) Man untersuche das Monotonieverhalten von f im Definitionsbereich D .
- f) Man bestimme alle lokalen Extrema von f .
- g) Wie lautet das Taylor-Polynom $T_1(x; x_0)$ von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

Aufgabe 24:

Man diskutiere die reellwertige Funktion $f(x) = x + \frac{x}{|x| - 2}$.

Dazu untersuche man im Einzelnen: Definitionsbereich, Symmetrien, Pole, Verhalten im Unendlichen und Asymptoten, Nullstellen, Extrema und Monotonie, Wendepunkte und Konvexität. Abschließend zeichne man den Graphen von $f(x)$.

Abgabetermin: 5.2. - 8.2. (zu Beginn der Übung)