Es bezeichnet exp die e-Funktion, d.h. $\exp(x) = e^x$ und $\log(x)$ die zugehörige Umkehrfunktion, also den natürlichen Logarithmus.

Aufgabe 1:

a) Man untersuche die durch $a_1 = 0$ und $a_{n+1} = \dfrac{3 - a_n}{2}$ für $n \geq 1$ definierte rekursive Folge auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls den Grenzwert.

b) Warum konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} \right)$?

Ab welchem Index N gilt für die Partialsummen S_N und den Grenzwert S der Reihe $|S - S_N| \leq \dfrac{1}{30}$?

c) Man berechne die erste Ableitung von

(i) $f(x) = \log\left(\dfrac{x^2+2}{x^4+4}\right)$

(ii) $g(x) = \sqrt[5]{4x^3 + 2x^2 + 1}$.

Aufgabe 2:

a) Man berechne die folgenden Grenzwerte

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x}$,

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{\log(1+x) - x}$.

b) Gegeben sei die durch $f(x) = \exp(2x - 1) \cdot \sin(\pi x)$ definierte Funktion.

(i) Man berechne das Taylorpolynom $T_2(x; x_0)$ von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

(ii) Man schätze den Fehler zwischen $f(x)$ und $T_2(x; 1)$ im Intervall $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$ nach oben ab.