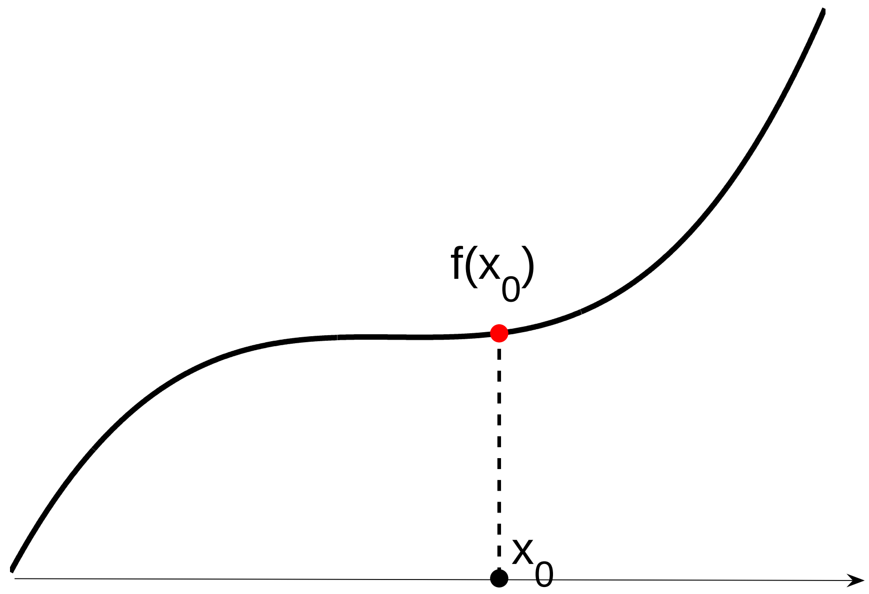
5 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

5.1 Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen



Graph einer stetigen Funktion.

Häufungspunkt und Abschluss.

Im Folgenden betrachten wir für normierte Vektorräume V und W Funktionen $f : D \to W$ mit Definitionsbereich $D \subset V$.

Definition:

- *Ein Punkt $x_0 \in V$ heißt* Häufungspunkt *von D, falls eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad : \quad x_n \in D, \;\; x_n \neq x_0, \;\; \lim_{n\to\infty} x_n = x_0;$$

- D' *bezeichnet die* Menge aller Häufungspunkte *von D;*
- $\overline{D} = D \cup D'$ *bezeichnet den* topologischen Abschluss *von D;*
- *Die Menge D heißt* abgeschlossen, *falls $D' \subset D$, also $\overline{D} = D$ gilt.* □

Definition:

- *Zu* $x_0 \in V$ *und* $\varepsilon > 0$ *bezeichnet*

$$K_\varepsilon(x_0) := \{x \in V \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

die (offene) Kugel *um* x_0 *mit Radius* ε*. Die Menge*

$$\overline{K_\varepsilon(x_0)} = \{x \in V \mid \|x - x_0\| \leq \varepsilon\};$$

heißt abgeschlossene Kugel *um* x_0 *mit Radius* ε*.*

- $D \subset V$ *heißt* beschränkt, *falls es* $\varepsilon > 0$ *und* $x_0 \in V$ *gibt mit* $D \subset K_\varepsilon(x_0)$*;*
- $x_0 \in D$ *heißt* innerer Punkt *von* D*, falls es* $\varepsilon > 0$ *gibt mit* $K_\varepsilon(x_0) \subset D$*;*
- *verwenden die Notation* D^0 *für die* Menge aller inneren Punkte *von* D*, kurz:* das Innere *von* D*;*
- D *heißt* offen, *falls* $D^0 = D$*.* □

Beispiele.

- Das offene Einheitsintervall $D = (0,1)$ ist offen und beschränkt. Es gilt $\{0,1\} \notin D$, aber $\{0,1\} \in D'$. Somit $\overline{D} = [0,1]$.
- Das Einheitsintervall $D = [0,1]$ ist abgeschlossen und beschränkt.
- Die Menge $D = [0,\infty) \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen, aber nicht beschränkt.
- Für $D = (-\infty,0) \cup \{1\} \cup (2,\infty)$ gilt

$$\begin{aligned} D' &= (-\infty,0] \cup [2,\infty) \\ \overline{D} &= (-\infty,0] \cup \{1\} \cup [2,\infty) \\ D^0 &= (-\infty,0) \cup (2,\infty) \end{aligned}$$

- Für $x_0 \in V$ ist die Menge $D = K_\varepsilon(x_0) \subset V$ offen, und es gilt $D' = \overline{K}_\varepsilon(x_0)$.
- Innere Punkte $x_0 \in D^0$ sind stets Häufungspunkte von D, denn es gilt

$$x_0 + \frac{\varepsilon}{n+1}\frac{z}{\|z\|} \longrightarrow x_0 \quad (n \to \infty) \qquad \text{für } z \in V \setminus \{0\}.$$

Definition: *Gegeben sei eine Funktion* $f : D \to W$, $D \subset V$, *und ein* $x_0 \in D'$.

- $f(x)$ konvergiert *für* $x \to x_0$ *gegen den Grenzwert* y_0, *falls für jede Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *mit* $x_n \in D$ *und* $x_n \neq x_0$, *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$$

Man verwendet in diesem Fall die Notation

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0.$$

- *Im Fall* $D = \mathbb{R}$ *lassen sich* einseitige *Grenzwerte wie folgt definieren.*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = y_0 \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in D,\; x_n < x_0 :$$

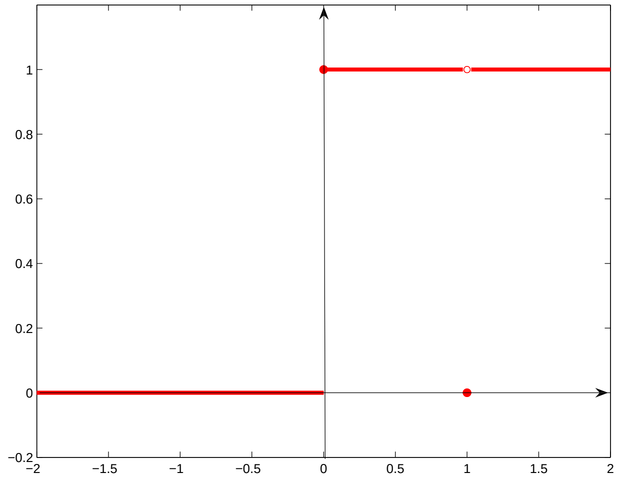
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = y_0 \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in D,\; x_n > x_0 :$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0. \qquad \square$$

Beispiel. Betrachte die *Sprungfunktion* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \text{ oder } x = 1; \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Graph von $f(x)$.

Für $x \longrightarrow 0$ existiert der Grenzwert von f nicht!

Weiterhin gilt

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 \neq f(1).$$

Beispiel. Für die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \sin(1/x)$, existiert weder der Grenzwert $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ noch $\lim_{x \to 0^-} f(x)$.

Beispiel. Für die Funktion $f(x) = 1/x$ existieren die beiden einseitigen *uneigentlichen* Grenzwerte

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Grenzwertsätze für Funktionen.

Bemerkung: Grenzwertsätze für Folgen übertragen sich auf Funktionen:

- Für den Grenzwert einer Summe von Funktionen gilt

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

- Für den Grenzwert eines Produkts einer Funktion mit einem Skalar gilt

$$\lim_{x \to x_0} (\lambda \cdot f(x)) = \lambda \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

- Für Produkte von reellwertigen (komplexwertigen) Funktionen gilt

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \to x_0} g(x) \right)$$

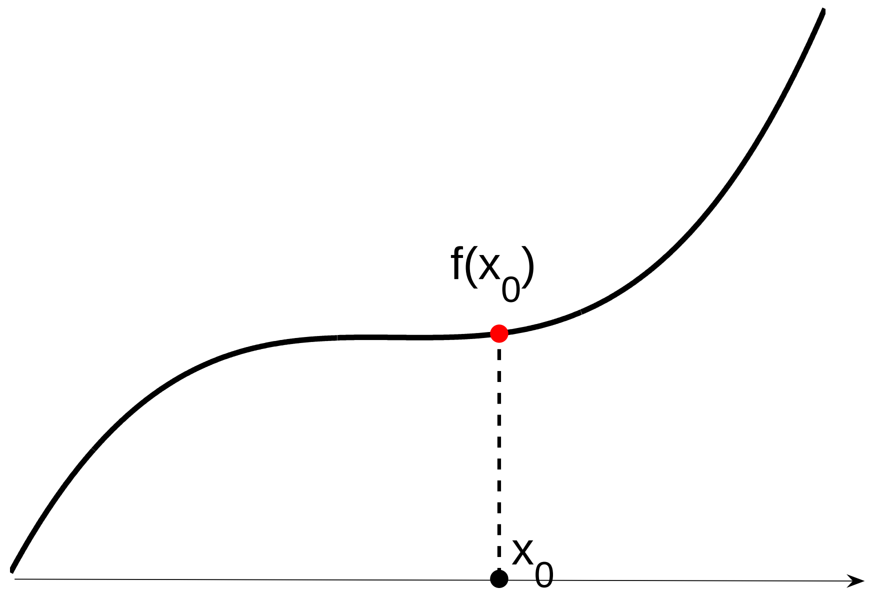
- Für vektorwertige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) gilt

$$\lim_{x \to x_0} (f_1(x), \ldots, f_n(x)) = \left(\lim_{x \to x_0} f_1(x), \ldots, \lim_{x \to x_0} f_n(x) \right) \qquad \square$$

Stetige Funktionen.

Definition: *Sei* $f : D \to W$, $D \subset V$, *eine Funktion.*

- $f(x)$ *heißt* stetig ergänzbar *in* $x_0 \in D'$, *falls* $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *existiert.*
- $f(x)$ *heißt* stetig *im Punkt* $x_0 \in D \cap D'$, *falls* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- $f(x)$ *heißt* stetig, *falls* $f(x)$ *in allen Punkten* $x_0 \in D \cap D'$ *stetig ist.* $\square$



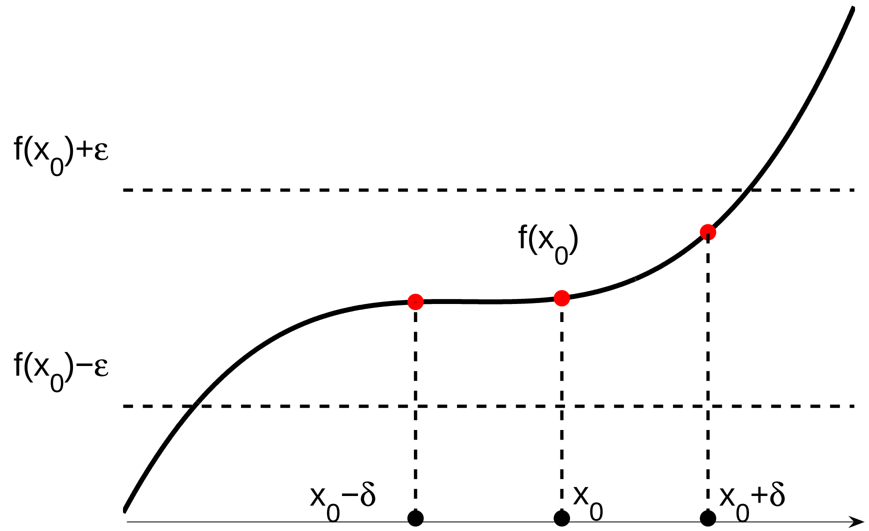
Graph einer stetigen Funktion.

ε-δ-Definition der Stetigkeit.

Satz (ε-δ-Definition der Stetigkeit):
Für $x_0 \in D \cap D'$ *sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(a) $f(x)$ *ist stetig in* x_0*, d.h.* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$*;*

(b) $\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in D : \quad \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$



Graph einer stetigen Funktion.

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b): **Annahme:** $\exists\, \varepsilon > 0 \;:\; \forall\, \delta > 0 \;:\; \exists\, x_\delta \in D \;:$

$$\|x_\delta - x_0\| < \delta \quad \wedge \quad \|f(x_\delta) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$$

Die Wahl $\delta = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ generiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in D$, mit

$$\|x_n - x_0\| < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad \|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$$

Wegen $\|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$ gilt $x_n \neq x_0$ und somit

$$x_n \in D \setminus \{x_0\} \qquad \text{für alle } n.$$

Weiterhin gilt

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0.$$

Gleichzeitig konvergiert aber $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen $f(x_0)$. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, wonach $f(x)$ im Punkt x_0 stetig ist. $\square$

(b) $\Rightarrow$ (a): Es gelte

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \qquad \text{mit } x_n \in D \setminus \{x_0\} \text{ für alle } n.$$

Wähle zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\forall\, x \in D : \|x - x_0\| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

Sei nun $N = N(\varepsilon)$ mit

$$\forall\, n \geq N \ : \ \|x_n - x_0\| < \delta.$$

Dann folgt direkt

$$\forall\, n \geq N \ : \ \|f(x_n) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0),$$

d.h. die Funktion $f(x)$ ist stetig im Punkt x_0. ■

Beispiele für stetige Funktionen.

- Konstante Funktionen $f : D \to W$, $f(x) \equiv a \in W$, sind stetig.
- Die Identität $\mathrm{id} : V \to V$, definiert durch $\mathrm{id}(v) = v$ für alle $v \in V$, ist stetig.
- Univariate Polynome, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$), der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \qquad a_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } a_k \in \mathbb{C}),$$

  sind stetig.

- Multivariate Polynome, d.h. Polynome in n (reellen oder komplexen) Variablen, $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (oder $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$), der Form

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1,\ldots,k_n} \cdot x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$$

  sind stetig.

Weitere Beispiele für stetige Funktionen.

- Die Wurzelfunktion $\sqrt[m]{x} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $[0, \infty)$.
- Eine Potenzreihe, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$), der Form

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \qquad z_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } z \in \mathbb{C}\text{)},$$

ist auf dem Bereich, wo die Reihe $p(z)$ *absolut* konvergiert, stetig.

- **Beispiel:** Die absolut konvergente Exponentialreihe $\exp(z)$ ist überall stetig. Weiterhin sind die Funktionen $\log(z)$, $\sin(z)$, und $\cos(z)$ auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen stetig.
- Sind die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ stetig im Punkt x_0, so auch

$$f(x) + g(x), \quad \lambda \cdot f(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{(für } g(x_0) \neq 0\text{)}.$$

- **Allgemeiner:** Die Komposition stetiger Funktionen ist stetig.
Beispiel: $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. □

Satz: *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall* $[a, b] \subset \mathbb{R}$. *Dann gelten die folgenden Eigenschaften.*

(a) Existenz einer Nullstelle.

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$$

(b) Zwischenwertsatz.

$$f(a) < c < f(b) \quad \Longrightarrow \quad \exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = c$$

(c) Stetigkeit der Umkehrfunktion.
Ist f *streng monoton wachsend, d.h.* $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, *so ist auch die Umkehrfunktion* $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ *stetig streng monoton wachsend.*

(d) Min-Max-Eigenschaft.
Die Funktion f *nimmt ihr Maximum und Minimum auf* $[a, b]$ *an, d.h. es gibt* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *mit*

$$f(x_1) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \quad \textit{und} \quad f(x_2) = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

Beweis:

(a): klar mit Bisektionsverfahren.

(b): wende Teil (a) auf die Funktion $g(x) = f(x) - c$ an.

(c): Übung (siehe Literatur).

(d): Weise die Existenz des Maximums nach. Sei $s = \sup\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$. Dann existiert eine Folge $(x_k)_k \subset [a, b]$ mit $f(x_k) \to s \ (k \to \infty)$.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine *konvergente* Teilfolge $(x_{k_j})_j$ von $(x_k)_k$ in $[a, b]$, d.h. für ein $x_0 \in [a, b]$ gilt

$$x_{k_j} \to x_0 \quad (j \to \infty) \qquad \text{und} \qquad f(x_{k_j}) \to s \quad (j \to \infty)$$

Wegen der Stetigkeit von f gilt $s = f(x_0) = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$.

Den Nachweis für die Existenz des Minimums führt man analog. ■

Wichtige Bemerkung.

Für die Gültigkeit der Min-Max-Eigenschaft ist es wesentlich, dass man ein `kompaktes` (d.h. abgeschlossenes und beschränktes) Intervall $[a, b]$ betrachtet.

Sonst gilt die Aussage im Allgemeinen nicht!!!

Gegenbeispiel:
Betrachte die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D = (0, \infty) \subset \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad \text{für } x \in D = (0, \infty).$$

• f ist auf ganz D stetig, nimmt aber weder Minimum noch Maximum auf D an.

Min-Max-Eigenschaft für multivariate Funktionen.

Definition: *Eine Menge* $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* `kompakt` (`folgenkompakt`), *falls jede Folge* $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $\mathbf{x}_k \in \mathrm{D}$, *eine* **in der Menge** D *konvergente Teilfolge*

$$\mathbf{x}_{k_j} \longrightarrow \mathbf{x}_0 \in \mathrm{D} \quad (j \longrightarrow \infty)$$

besitzt. □

Satz: *Ist* $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^n$ *eine kompakte Menge und ist die Funktion* $f : \mathrm{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig auf* D, *so nimmt* f *auf* D *Minimum und Maximum an, d.h. es gibt Punkte* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathrm{D}$ *mit*

$$f(\mathbf{x}_1) = \min_{\mathbf{x} \in \mathrm{D}} f(\mathbf{x}) \qquad \textit{und} \qquad f(\mathbf{x}_2) = \max_{\mathbf{x} \in \mathrm{D}} f(\mathbf{x}).$$

Beweis: Analog wie der Beweis von Teil (d) im vorigen Satz.
Verwende dazu insbesondere den Satz von Bolzano-Weierstraß. ■

Kriterien für Kompaktheit.

Satz: *Für eine Menge* $D \subset \mathbb{R}$ *sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.*

(a) D *ist kompakt;*

(b) D *ist abgeschlossen und beschränkt;*

(c) Heine-Borel-Überdeckung*:*
Jede offene Überdeckung von D *besitzt eine* **endliche** *Teilüberdeckung, d.h. es gilt*

$$D \subset \bigcup_{i \in I} U_i, \quad U_i \textit{ offen} \quad \Longrightarrow \quad \exists\, i_1, \ldots, i_k \in I : D \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_{i_j}$$

□

Beweis: (nur die Äquivalenz $(a) \iff (b)$).

$(a) \Rightarrow (b)$**:** Sei D kompakt.

Angenommen, D wäre unbeschränkt. Dann gibt es eine Folge $(x_m) \subset D$ mit $\lim_{m\to\infty} \|x_m\| = \infty$. Diese Folge kann allerdings keine konvergente Teilfolge besitzen. Dies steht im Widerspruch zur Kompaktheit von D.

Angenommen, D wäre nicht abgeschlossen. Dann gibt es einen Häufungspunkt x_0 von D mit $x_0 \notin D$, d.h. es gibt eine Folge $(x_m) \subset D$ mit $\lim_{m\to\infty} x_m = x_0 \notin D$. Diese Folge kann aber keine in D konvergente Teilfolge besitzen. Dies steht im Widerspruch zur Kompaktheit von D.

$(b) \Rightarrow (a)$**:** Sei D abgeschlossen und beschränkt.

Sei $(x_m) \subset D$ eine Folge in D. Da D beschränkt ist, ist auch die Folge (x_m) beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt (x_m) eine konvergente Teilfolge (x_{m_j}) mit $x_{m_j} \to x_0$. Da D abgeschlossen ist, liegt x_0 in D. Somit ist (x_{m_j}) eine in D konvergente Teilfolge von (x_m). ∎

Beispiel.

Sei $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|$, d.h.

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Offensichtlich ist $\mathbb{S}^{n-1}$ kompakt (abgeschlossen und beschränkt).

Somit existieren für jede gegebene Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ zwei Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$ mit

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}_1\| = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \quad \text{und} \quad \|\mathbf{A}\mathbf{x}_2\| = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$$

Dies folgt aus der Min-Max-Eigenschaft, denn die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$$

ist stetig auf $\mathbb{S}^{n-1}$. $\square$

Gleichmäßige Stetigkeit.

Definition: *Eine Funktion* $\mathbf{f}: D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, *heißt* gleichmäßig stetig *auf* D, *falls gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, \delta > 0 : \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| < \varepsilon \qquad \square$$

Satz: *Jede stetige Funktion auf einem Kompaktum ist gleichmäßig stetig. D.h.:*

Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ *eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge* $D \subset \mathbb{R}^n$*.*
Dann ist f *gleichmäßig stetig auf* D*.* $\square$

Bemerkung: Falls $f : D \to \mathbb{R}^m$ gleichmäßig stetig auf D, so ist f stetig auf D.

Beispiele:

- $f(x) = 1/x$ ist stetig auf $(0, \infty)$, aber nicht gleichmäßig stetig auf $(0, \infty)$.
- $f(x) = \exp(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, aber nicht gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.
- $f(x) = \sin(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ und sogar gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.

Wichtige Schlussbemerkung.

Ich wünsche Ihnen

FROHE WEIHNACHTEN

und ein

ERFOLGREICHES NEUES JAHR

$$11111010111_2$$

$\blacksquare$