6.4 Fixpunkt-Iteration

Ziel: Iterative Lösung der (nichtlinearen) Gleichung $f(x) = 0$.

Möglichkeiten:

- Bisektionsverfahren (Intervallhalbierung)
- Newton-Verfahren,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots,$$

Iteratives Verfahren: Fixpunkt-Iteration mit stetiger Verfahrensfunktion Φ und Startwert x_0 , so dass

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

mit Grenzwert

$$x^* = \lim_{k \to \infty} x_{k+1} = \lim_{k \to \infty} \Phi(x_k) = \Phi\left(\lim_{k \to \infty} x_k\right) = \Phi(x^*).$$

Grundidee der Fixpunkt-Iteration.

Löse statt $f(x) = 0$ das Fixpunkt-Problem

$$x = \Phi(x)$$

mit der Fixpunkt-Iteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Beispiel: Newton-Iteration. Hierbei ist

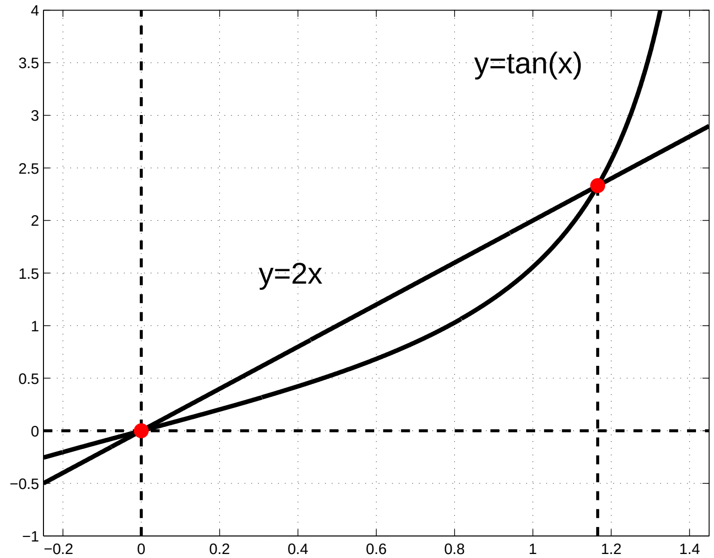
$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

ABER: Verfahrensfunktion Φ ist im Allgemeinen nicht eindeutig!

Beispiel.

Suche im Intervall $(0, \pi/2)$ die (eindeutige) Nullstelle von

$$f(x) = 2x - \tan(x).$$



Lösungsmöglichkeiten:

- Iteration mit $x = \frac{1}{2}\tan x = \Phi_1(x)$
- Iteration mit $x = \arctan(2x) = \Phi_2(x)$

Ergebnisse der beiden Fixpunkt-Iterationen.

- Betrachte Iterationen

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\tan(x_k) \quad \text{und} \quad y_{k+1} = \arctan(2y_k)$$

- Wähle als Anfangsnäherung in beiden Iterationen

$$x_0 = 1.2 \quad \text{und} \quad y_0 = 1.2$$

- Beide Iterationen konvergieren im Grenzwert für $k \to \infty$, aber

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} y_k = 1.1655\,61185$$

- Berechne die Iterationen mittels eines Computerprogramms

Bemerkung: Die Konvergenzgeschwindigkeit hängt ab vom Abstand

$$|x_{k+1} - x_k|$$

zweier benachbarter Folgenglieder.

Definition: *Sei* $(V, \|\cdot\|)$ *ein normierter Vektorraum. Eine Abbildung* $\Phi : D \to V$, $D \subset V$, *heißt* Lipschitz-stetig *auf* D, *falls eine Konstante* L *existiert, so dass*

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \le L\|x - y\| \qquad \text{für alle } x, y \in D.$$

Die Konstante L *nennt man* Lipschitz-Konstante. □

Definition: *Eine Abbildung* $\Phi : D \to V$, $D \subset V$, *heißt* kontrahierend, *falls* Φ *Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante* $L < 1$. *Man nennt in diesem Fall* L *die* Kontraktionskonstante *von* Φ. □

Bemerkungen:

- Jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig.
- Falls die Abschätzung

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| < \|x - y\| \qquad \text{für alle } x \neq y$$

gilt, so ist Φ nicht notwendigerweise kontrahierend. □

Beispiel: Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}$ mit $L = 1$.

Satz: *Jede* C^1*-Funktion* $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ist Lipschitz-stetig auf* $[a,b]$ *mit der Lipschitz-Konstanten*

$$L = \sup\{|\Phi'(x)| \;:\; a \le x \le b\}.$$

Beweis: Aus dem Mittelwertsatz folgt

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)|\,|x-y| \le L\,|x-y| \qquad \text{für alle } x, y \in [a,b].$$

$\blacksquare$

Beispiele:

- Die Sinusfunktion $\sin(x)$ ist Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}$ mit $L = 1$.
- Der Logarithmus $\log(x)$ ist Lipschitz-stetig auf $[1,\infty)$ mit $L = 1$.
- Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist Lipschitz-stetig auf $(-\infty, 0]$ mit $L = 1$.
- Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist **nicht** Lipschitz-stetig auf $[0,\infty)$.

Satz (Banachscher Fixpunktsatz):
Sei $(V, \|\cdot\|)$ *ein vollständiger normierter Raum (Banachraum). Weiterhin sei* $D \subset V$, $D \neq \emptyset$, *abgeschlossen und* $\Phi : D \to D$ *eine kontrahierende Abbildung mit Kontraktionskonstante* $L < 1$. *Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Es gibt genau einen Fixpunkt* x^* *von* Φ *in* D, *d.h.* $\Phi(x^*) = x^*$;

(b) *Für jeden Startwert* $x_0 \in D$ *konvergiert die Fixpunkt-Iteration*

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

gegen den Fixpunkt x^*;

(c) *Es gilt die a priori-Fehlerabschätzung*

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\|;$$

und die a posteriori-Fehlerabschätzung

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L}{1-L}\|x_n - x_{n-1}\|.$$

Beweis: **(b):** Sei $x_0 \in D$ beliebig. Dann gilt $x_k = \Phi(x_{k-1}) \in D$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit ist $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in D, wobei gilt

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})\| \leq L\|x_k - x_{k-1}\|.$$

und somit

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq L^{k+1-n}\|x_n - x_{n-1}\| \qquad \text{für } k \geq n.$$

Für $m \geq n \geq k$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &= \|(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \ldots + (x_{n+1} - x_n)\| \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \left(\sum_{k=n}^{m-1} L^{k+1-n}\right) \|x_n - x_{n-1}\| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} L^j\right) \|x_n - x_{n-1}\| = \frac{L}{1-L}\|x_n - x_{n-1}\|. \end{aligned}$$

Weiterhin

$$\|x_m - x_n\| \leq \frac{L}{1-L}\|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\|.$$

womit

$$\lim_{n\to\infty} \|x_m - x_n\| = \lim_{n\to\infty} \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\| = 0.$$

$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist Cauchy-Folge mit Grenzwert $x^* \in D$, d.h. $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$.

Wegen der Stetigkeit von Φ und mit $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ folgt daraus $x^* = \Phi(x^*)$.

(a): Angenommen, es gäbe einen weiteren Fixpunkt $x^{**} \in D$, mit $x^* \neq x^{**}$. Dann folgt der Widerspruch

$$\|x^{**} - x^*\| = \|\Phi(x^{**}) - \Phi(x^*)\| \leq L\|x^{**} - x^*\| < \|x^{**} - x^*\|.$$

(c): Folgt sofort mit

$$\|x^* - x_n\| = \lim_{m\to\infty} \|x_m - x_n\| \leq \frac{L}{1-L}\|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\|.$$

■

Beispiel. Berechne Fixpunkt von $\Phi(x) = 0.1 \cdot \exp(x)$ auf $D = [-1, 1]$.

Überprüfe zunächst die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes:

- D ist nichtleer und abgeschlossen;
- es gilt $0 < \Phi(x) \leq 0.1 \cdot e < 1$ und somit $\Phi(D) \subset D$;
- es gilt $|\Phi'(x)| = \Phi(x) \leq e/10 < 1$ für alle $x \in D$;
- somit ist Φ kontrahierend auf D mit $L = e/10 < 1$.

Damit sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Berechne nun den Fixpunkt $x^* \in D$ von Φ mit der Iteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$.

Setze $x_0 = 1$. Dann bekommt man $x_1 = 0.2718281828\ldots$, und es gilt

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|.$$

Für $\varepsilon = 10^{-6}$ bekommt man damit

$$|x_n - x^*| < \varepsilon \qquad \text{für } n \geq 11.$$